

**PC 18 – CORRIGÉ**

**Système de bosons au voisinage de l'état fondamental :  
condensation de Bose**

**Système de fermions à deux niveaux :  
modèle simplifié de semiconducteur intrinsèque**

**I. Système de bosons au voisinage de l'état fondamental : condensation de Bose**

$$I.1) \bar{N}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$I.2) N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \cdot \text{D'où : } \mu = -kT \ln(1 + 1/N_0)$$

$$N_0 \text{ grand : } \mu \approx -kT/N_0, \text{ très petit et } N_0 \approx -\frac{1}{\beta\mu}$$

I.3) On considère le premier état excité. Dans les conditions  $\beta\varepsilon \ll 1$ , il vient :

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\beta(\varepsilon - \mu)} = \frac{1}{\beta\varepsilon + 1/N_0}$$

$\beta\varepsilon$  est petit devant 1 (typiquement  $10^{-3}$ ), mais reste très grand devant  $1/N_0$  (typiquement

$$1/N_{Av}). \text{ D'où : } N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\beta\varepsilon}$$

$N(\varepsilon)/N_0 \ll 1$  et seul l'état fondamental est peuplé, ce qui est unique pour la statistique de Bose Einstein.

**II. Système de fermions à deux niveaux : modèle simplifié de semiconducteur intrinsèque**

I.1) Populations des deux niveaux à la température T :

$$N_1 = \frac{N}{e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} + 1} \quad N_2 = \frac{N}{e^{\beta(\varepsilon_2 - \mu)} + 1}$$

I.2)  $N_1 + N_2 = N$ , soit :

$$\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_2 - \mu)} + 1} = 1$$

$$[\text{Plus généralement : } N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \text{ avec ici : } g(\varepsilon) = N\delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + N\delta(\varepsilon - \varepsilon_2)]$$

$$e^{\beta(\varepsilon_2 - \mu)} + 1 + e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} + 1 = e^{\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\mu)} + 1 + e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} + e^{\beta(\varepsilon_2 - \mu)}$$

$$1 = e^{\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\mu)}, \text{ soit : } \mu = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$\text{II.3) } E = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 = N \left( \frac{\varepsilon_1}{e^{\beta \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}} + 1} + \frac{\varepsilon_2}{e^{\beta \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2}} + 1} \right)$$

$$\text{En posant : } \varepsilon_1 = \mu - \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad \varepsilon_2 = \mu + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad x = e^{\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}}$$

$$E = N \left( \frac{\mu - \frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\frac{1}{x} + 1} + \frac{\mu + \frac{\Delta\varepsilon}{2}}{x + 1} \right)$$

$$E = N\mu + N \frac{\Delta\varepsilon}{2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \quad E = N\mu - N \frac{\Delta\varepsilon}{2} \left( \frac{e^{\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}} - 1}{e^{\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}} + 1} \right)$$

$$\boxed{E = N\mu - N \frac{\Delta\varepsilon}{2} \operatorname{th} \beta \frac{\Delta\varepsilon}{4}}$$

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = -N \frac{\Delta\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{ch^2 \beta \frac{\Delta\varepsilon}{4}} \right) \cdot \left( -\frac{\Delta\varepsilon}{4kT^2} \right)$$

$$C_v = N \frac{k}{8} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{kT} \right)^2 \frac{1}{ch^2 \beta \frac{\Delta\varepsilon}{4}}$$

$$\text{Hors sujet : } \Delta\varepsilon = k\theta ; \theta \gg T \text{ car } \Delta\varepsilon \approx 1 \text{ eV} ; \quad ch \frac{\theta}{4T} \sim e^{\frac{\theta}{4T}} \rightarrow C_v \sim N \frac{k}{2} \left( \frac{\theta}{T} \right)^2 e^{-\frac{\theta}{2T}}$$

$$\text{II.4) } N_2 = \frac{N}{e^{\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}} + 1} \approx N e^{-\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}}$$

$$\text{II.5) } \sigma = a N_2 = \alpha e^{-\beta \frac{\Delta\varepsilon}{2}}$$

$$\ln \sigma = \text{cste} - \frac{\Delta\varepsilon}{2kT}$$

$$\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right) \text{ est une droite dont la pente } \left(\frac{\Delta\varepsilon}{2k}\right) \text{ permet d'évaluer } \Delta\varepsilon.$$