

Durée : 1h30 Contrôle Sans documents.

On pourra trouver utile la présence d'un **formulaire** en fin d'énoncé.

Toutes les réponses devront être justifiées et rédigées avec soin.

Les applications numériques ne sont **pas** facultatives.

Les calculatrices étant inutiles, elles ne sont pas autorisées.

Répondre sur les feuilles en dessous de chaque question. Utiliser le verso si nécessaire.

Nom et prénom : NECCHI Pierpaolo Giorgio

1 Vocabulaire de base et ordres de grandeurs

1. On tente ici d'utiliser l'expérience de Lenard pour déterminer le travail de sortie électronique d'un atome inconnu. A cet effet, on utilise un rayonnement électromagnétique monochromatique incident de longueur d'onde $\lambda = 315 \text{ nm}$.

Par effet photo-électrique, des électrons sont éjectés et l'on mesure leur distribution des vitesses. La vitesse minimale mesurée est environ 15 km/s et la vitesse maximale de 900 km/s . Calculer en eV (electron-volt) le travail de sortie électronique de cet atome. Tous les calculs devront être détaillés et clairement justifiés.

Réponse :

$$\lambda = 315 \text{ nm} = 315 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$v_{\min} = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 15 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\max} = 900 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 900 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En modélisant l'interaction photon-électron comme une collision entre billes, on a le bilan énergétique suivant :

$$E_{\text{cin, } e} = E_{\text{photon incident}} - W_{\text{extraction}} \Rightarrow W_{\text{extraction}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2} m_e v_e^2$$

$$W_{\text{extraction}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,15 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (900 \cdot 10^3)^2$$

analogiquement: $W_{\text{extraction max}} \approx 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 1,33 \cdot 10^{-39} \text{ eV}$

2. L'atome de lithium (neutre) possède 3 électrons. Nous ne nous intéressons ici qu'à l'électron de valence dont on suppose que l'état est identifié par un nombre quantique principal $n = 2$ et nombre quantique orbital $\ell = 1$. Cet électron est en moyenne bien plus éloigné du noyau que les deux autres électrons (que l'on appelle "de cœur"). De ce fait, l'électron de valence subit essentiellement une force d'attraction par le noyau et de répulsion par les électrons de cœur. En définitive, tout se passe donc comme si l'électron de valence "voyait" une charge du noyau significativement différente de ce qu'elle est réellement. Cette charge est nommée "charge effective" et notée Z^* . Nous admettons que, moyennant la prise en compte de cet effet d'écrantage par les électrons de cœur, l'électron de valence peut être décrit dans une approche de type hydrogénoïde. Une expérience montre qu'il faut dépenser environ 5.2 eV pour libérer cet électron. Calculer une estimation numérique de Z^* .

On donne $\sqrt{5/14} \approx 0,6$.

Réponse : Dans la supposition de pouvoir traiter l'atome comme un atome hydrogénoïde, on a que l'énergie de l'électron de valence est

$$E_{n=2} = -13,6 \left(\frac{Z^*}{n} \right)^2 \text{ eV} = -5,2 \text{ eV} \Rightarrow Z^* = 2 \sqrt{\frac{5,2}{13,6}} \approx 2 \cdot 0,7 = 1,4$$

2 Stern et Gerlach sur un jet de bosons

Un four fournit un flux de bosons identiques. Ces particules ont une masse m et une charge q . En sortie du four ces particules (supposées libres) sont sélectionnées pour toutes avoir une même énergie cinétique E_0 . Elles se déplacent selon le sens croissant de l'axe des x (voir figure 1).

2.1 Champ électrique

Les particules monocinétiques trouvent sur leur trajectoire (rectiligne, puisque qu'elles sont libres) une zone dans laquelle règne un champ électrique $\vec{E} = -\mathcal{E}\vec{e}_x$ avec $\mathcal{E} > 0$. On choisit de poser l'origine $x = 0$ au début de cette zone. La zone de champ électrique se termine en $x = a$. Partout ailleurs, le champ électrique est nul.

Les particules sont émises du four les unes après les autres avec un flux très faible de telle sorte que chaque particule peut être considérée indépendamment des autres. On suppose que le potentiel est partout continu et qu'en dehors de cette zone de champ électrique, le potentiel est constant. On supposera, pour simplifier les écritures, que le potentiel est nul en sortie du four que l'on positionne en $x = -\infty$.

1. Écrire l'expression de l'énergie classique totale des particules, en fonction de m , p , q , \mathcal{E} , a et x dans les 3 domaines suivants $x < 0$, $x \in [0, a]$, $x > a$. Tracer sur la figure 1 ci-dessous l'allure du potentiel auquel chaque particule sera soumise.

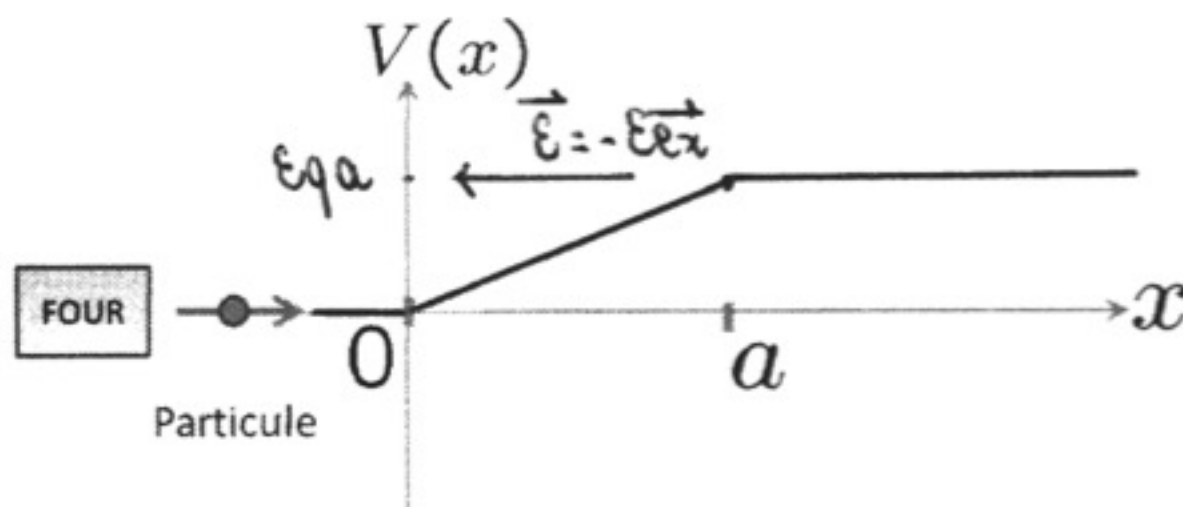


FIGURE 1 – Sens de déplacement de la particule et repère du potentiel.

Réponse : Énergie classique totale des particules : $E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

(1) • $x < 0$: $W \neq V(x) = 0 \Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{p^2}{2m}$

(2) • $0 < x < a$: potentiel interaction boson-champ électrique :

(3) • $x > a$: $V(x) = V(a) = Eq*a$ car continue partout

$\hookrightarrow E_{\text{tot}} = \frac{p^2}{2m} + Eq*a$

L'Hamiltonien du système s'écrit $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$ où $\hat{V}(x)$ dépend de la région

2. On note $\psi(x, t) = \phi(x) \times f(t)$ la fonction d'onde d'une particule. En faisant apparaître les données pertinentes du problème (E_0 , q , m ...), Calculer la forme de la partie temporelle de la fonction d'onde $f(t)$.

Réponse : fonction d'onde de la particule: $\psi(x, t) = \phi(x) f(t)$

l'éq. de Schrödinger s'écrit: $\hat{H}\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) f(t) + \hat{V}(x) \phi(x) f(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) f(t)$

les deux termes doivent être constants et homogènes à une énergie E :

$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = E f(t) \Rightarrow f(t) = K e^{-iEt/\hbar}$

3. Compte tenu des conditions indiquées précédemment, trouver la forme de la partie spatiale de la fonction d'onde dans le domaine $x < 0$. On fera apparaître les données pertinentes du problème ($E_0, q, m \dots$)

Réponse : pour $x < 0$ $V(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = E \Rightarrow \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x)$

on en déduit : $\phi(x) = A e^{-ikx} + B e^{ikx}$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

4. Quelle doit être la forme de la partie spatiale de la fonction d'onde dans le domaine $x > a$, c'est-à-dire au delà de la zone de champ électrique? On fera apparaître les données pertinentes du problème ($E_0, q, m \dots$)

Réponse : $x > a$: $V(x) = Eq a \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + Eq a = E \Rightarrow \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{2m(E - Eq a)}{\hbar^2} \phi(x)$

$k' = \sqrt{\frac{2m(E - Eq a)}{\hbar^2}}$

$\phi(x) = C e^{-ik'x} + D e^{ik'x}$

5. *Note : cette question est probablement plus difficile à aborder dans le temps imparti. Elle ne devra être traitée qu'en cas de la naissance d'un ennui profond et après s'être assuré de la justesse de tout le reste du contrôle. Les points seront comptés en bonus.*

On note $\mathcal{A}_i(y)$ et $\mathcal{B}_i(y)$ (fonctions d'Airy) les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x) = x g(x)$$

avec (mais la forme exacte importe peu ici) :

$$\mathcal{A}_i(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

et

$$\mathcal{B}_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{\left(\frac{-t^3}{3} + xt\right)} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt$$

Soit L et e une longueur et une énergie caractéristiques construites à partir des dimensions du problème :

$$L = \left(\frac{\hbar^2}{2mq\mathcal{E}} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad e = q\mathcal{E}L$$

Sans faire les calculs, poser les conditions de continuité de la fonction d'onde en $x = 0$ (utiliser le verso de cette feuille).

Réponse :

2.2 Champ magnétique

$q=0$

Les particules du four sont maintenant remplacées par des atomes neutres. Le dispositif est maintenant similaire à celui de l'expérience de Stern et Gerlach vue en cours. On admet que les atomes sont mono-cinétiques. Dans tout ce qui suit, les calculs seront effectués dans un référentiel lié à l'atome considéré. De ce fait, la contribution de l'énergie cinétique ne sera pas à prendre en compte dans le Hamiltonien.

1. Dans la zone $x \in [0, a]$ règne un champ magnétique homogène dirigé le long de l'axe z . Combien de taches va-t-on observer sur l'écran et en quelle(s) position(s) ?

Réponse : Soient $\vec{\mu}$ le moment magnétique des particules émis par le four et \vec{B} le champ magnétique homogène. Classiquement :

$$E_{\text{magn}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B \Rightarrow \vec{F}_{\text{magn}} = -\frac{\partial}{\partial z} E_{\text{magn}} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z = 0 \quad \text{les atomes ne sont pas soumis à une force magn.}$$

2. Le champ est maintenant rendu inhomogène : la géométrie de l'aimant est telle qu'il existe un gradient constant le long de z : $\partial_z B_1 \vec{e}_z$. Sur l'écran, on observe 3 taches. Ecrire l'expression de la force agissant sur les atomes et expliquer les origines possibles de ces taches (on ne retiendra que les contributions électroniques sans tenir compte du moment magnétique éventuellement porté par le noyau). On aura à cœur d'étayer les argumentations par une utilisation pertinente des propriétés des moments cinétiques quantiques.

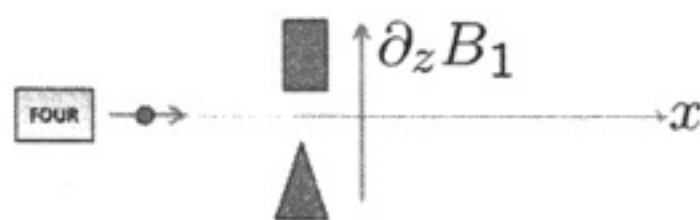


FIGURE 2 - champ inhomogène

Rappel :

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |l, m\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \\ \hat{L}_z |l, m\rangle &= \hbar m |l, m\rangle \\ l \text{ entier } \geq 0 \text{ et } m \in \{-l, \dots, l\} &\text{ par spin orbitale} \\ \hat{S}_z |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{fermions} \end{array} \right\}$$

Réponse : on a vu en [2.2.1] que $\vec{F}_{\text{magn}} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z$

On a en outre que $\vec{\mu} = \gamma \vec{L} + 2\gamma \vec{S}$ où \vec{L} est le moment cinétique des électrons de l'atome et \vec{S} est leur spin.

les atomes ne peuvent pas être la distribution des taches est donc générée par la quantification du moment cinétique et du spin le long z .

- cas de fermions : le spin prend valeurs demi-entières \rightarrow on ne peut avoir qu'un nombre pair de taches par la quantification du spin
- cas de bosons : le spin prend valeurs entières. Donc les trois taches peuvent être engendrées soit par la quantification de S_z : $\{S_z \in \{-1, 0, 1\}\}$ et $l=0, m=0$; soit par la quantification de L_z comme avant

3. Le champ magnétique est maintenant éteint.



FIGURE 3 - Déplacement sans champ

$$\vec{L} = 0$$

Une mesure (spectroscopique) nous apprend que le moment cinétique orbital net de l'atome est nul. On mesure le module au carré du spin de la particule. En s'appuyant sur l'existence des trois taches, expliquer ce que l'on peut espérer obtenir comme résultat(s) ? Avec

quelle(s) probabilité(s)? Réponse :

on a vu dans le dernière part que, si $\vec{L}=0$, alors la quantification des tâches est engendrée par le quant. du spin. on en déduit que les états sont des bosons qui peuvent

prendre la valeur de spin $S_z \in \{-1, 0, 1\}$. En supposant que aussi S_y et $S_x \in \{-1, 0, 1\}$

Alors on a $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(S^2=0) = P(S_x=0, S_y=0, S_z=0) = [\text{équiprobabilité}] = \frac{1}{27}$$

$$P(S^2=1) = \frac{6}{27}$$

$$P(S^2=2) = \frac{12}{27}$$

$$P(S^2=3) = P(S_x=1) + P(S_x=-1) = \frac{8}{27}$$

4. On note $|s, m_s\rangle$ les kets propres de \hat{S}_z l'opérateur associé à la projection du spin selon l'axe z. Écrire \hat{S}_z sous la forme d'une matrice 3×3 dans sa base propre. dans la base $(|s, -1\rangle, |s, 0\rangle, |s, 1\rangle)$

Réponse :

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_z |s, -1\rangle &= -\hbar |s, -1\rangle \\ \hat{S}_z |s, 0\rangle &= 0 |s, 0\rangle \\ \hat{S}_z |s, 1\rangle &= \hbar |s, 1\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2$$

5. Soit les deux opérateurs de décalages \hat{S}_+ et \hat{S}_- qui agissent sur les états propres de \hat{S}_z selon :

$$\hat{S}_+ |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)} |s, m_s+1\rangle$$

$$\hat{S}_- |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)} |s, m_s-1\rangle$$

Montrer qu'une représentation matricielle de $\hat{S}_y = (\hat{S}_+ - \hat{S}_-)/(2i)$ dans la base propre de \hat{S}_z est :

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse :

$$\hat{S}_y |s, -1\rangle = \frac{1}{2i} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) |s, -1\rangle = \frac{\hbar}{2i} \sqrt{s(s+1)} |s, 0\rangle$$

$$\hat{S}_y |s, 0\rangle = \frac{1}{2i} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) |s, 0\rangle = \frac{\hbar}{2i} [\sqrt{s(s+1)} |s, 1\rangle - \sqrt{s(s+1)} |s, -1\rangle] = \frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{2i} \begin{bmatrix} |s, 1\rangle \\ -|s, -1\rangle \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_y |s, 1\rangle = -\frac{1}{2i} \hat{S}_- |s, 1\rangle = -\frac{\hbar}{2i} \sqrt{s(s+1)} |s, 0\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{S}_y = \frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 + 2$$

si on pose $s=1$ on trouve le résultat de la conigne

6. Quels sont les résultats possibles d'une mesure de S_x , c'est-à-dire la projection du spin total sur l'axe x ?

Utiliser les règles sur commutateurs des composantes d'un moment cinétique pour vérifier que l'opérateur associé peut avoir la représentation matricielle :

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse : $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x$
 $\Rightarrow \hat{S}_x = \frac{\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y}{i\hbar}$ 1

$$\hat{S}_x = \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{2i} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{-2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. On effectue une mesure de la composante du spin selon l'axe x et l'on obtient 0. Montrer que dans la base des états propres de \hat{S}_z , le ket $|\alpha\rangle$ représentant l'état de l'atome tout de suite après la mesure est : $\mathcal{N}(|1, -1\rangle + |1, 1\rangle)$. On calculera le facteur \mathcal{N} .

On choisira de poser l'origine des temps à cet instant $t = 0$.

Réponse :

mesure $S_x = 0 \Rightarrow$ l'état du système devient immédiatement l'état propre de \hat{S}_x associé à la valeur propre nulle.

~~sur la base des états propres de \hat{S}_z~~ $\hat{S}_x \psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\psi_y = 0 \\ -\psi_x - \psi_z = 0 \\ -\psi_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_y = 0 \\ \psi_z = -\psi_x \end{cases} \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1

comme ψ est écrit dans la base des vecteurs propres de \hat{S}_z , on peut écrire

$\psi = \mathcal{N}(|1, -1\rangle - |1, 1\rangle)$ où \mathcal{N} peut être trouvée en imposant que $|\psi\rangle$ soit normé :

$$\langle \psi | \psi \rangle = \mathcal{N}^2 (\langle 1, -1 | 1, -1 \rangle + \langle 1, 1 | 1, 1 \rangle) = 2\mathcal{N}^2 = 1$$

donc le système, après la mesure, se trouve dans $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |1, 1\rangle)$ 1 $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. Tout de suite après cette mesure, $t = 0$, l'atome rentre dans un champ magnétique constant et homogène $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$. Le Hamiltonien est alors $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_2$. Écrire (sans la démontrer), dans la base des états propres de \hat{S}_z , l'expression du ket d'état $|\alpha(t)\rangle$ à l'instant $t \geq 0$ en fonction du champ magnétique.

Réponse : $\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -2\gamma \hat{S} \cdot \vec{B} = -2\gamma \hat{S}_z B_2 = -2\gamma B_2 \hat{S}_z$

sur la base des états propres de \hat{H} à l'instant t , on peut écrire

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_k c_k(t) |\phi_k\rangle = \sum_k c_k(0) e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} |\phi_k\rangle = c_{-1}(0) e^{-\frac{iE_{-1} t}{\hbar}} |1, -1\rangle + c_0(0) e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |1, 0\rangle + c_1(0) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1, 1\rangle$$

$\hat{H}\phi = E\phi = -2\gamma B_2 \hat{S}_z \phi \Rightarrow \hat{S}_z \phi = -\frac{E}{2\gamma B_2} \phi$ ϕ est état propre aussi de \hat{S}_z de valeur propre $-\frac{E}{2\gamma B_2}$

Donc

$$|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-iE_{-1}t}{\hbar}} |S, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-iE_{+1}t}{\hbar}} |S, 1\rangle$$

$$E_{-1} = -2\gamma B_2 m_s^{\uparrow-1} = 2\gamma B_2$$

$$E_{+1} = -2\gamma B_2 m_s^{\uparrow 1} = -2\gamma B_2$$

$$|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-i2\gamma B_2 t}{\hbar}} |S, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i2\gamma B_2 t}{\hbar}} |S, 1\rangle \quad 2$$

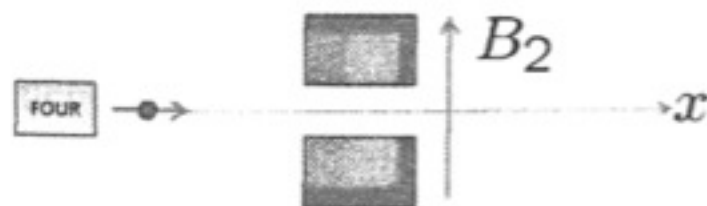


FIGURE 4 - Déplacement dans un champ homogène

9. Calculer la probabilité au bout d'un temps $t > 0$ pour que le système retourne dans l'état qu'il avait à $t = 0$, c'est-à-dire $|\alpha(0)\rangle$.

Réponse :

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)\rangle \Leftrightarrow e^{-\frac{i 2\gamma B_2 t}{\hbar}} = e^{\frac{i 2\gamma B_2 t}{\hbar}} = 1 \quad \text{pour un quelconque } t$$

$$-\sin\left(\frac{2\gamma B_2 t}{\hbar}\right) = \sin\left(\frac{2\gamma B_2 t}{\hbar}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\gamma B_2 t}{\hbar}\right) = 0$$

$$\frac{2\gamma B_2 t}{\hbar} = k\pi \Rightarrow t = k \frac{\pi \hbar}{2\gamma B_2} \quad \text{portant le système retourne périodiquement dans l'état initial.}$$

10. L'atome passe de nouveau dans le gradient de champ magnétique.

Calculer la probabilité pour qu'il ne soit pas dévié ?

Calculer la probabilité pour qu'il soit dévié vers le haut ?

Réponse :

atome n'est pas dévié si et seulement si il a spin nul. on doit donc avoir :

$|\alpha(t)\rangle \propto |s, 0\rangle$ en comparant avec la formule pour $|\alpha(t)\rangle$ on déduit qu'il est impossible

atome dévié vers le haut si

$|\alpha(t)\rangle \propto |s, 1\rangle$ toujours (mais il y a aussi une déflexion vers le bas)

11. On suppose qu'il existe un dispositif parasite à proximité de l'expérience. On a pu identifier que son effet perturbateur consiste à modifier le Hamiltonien du système par un terme additionnel dont la représentation dans la base propre de \hat{S}_z prend la forme :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Après avoir indiqué les conditions de validité d'un raisonnement en perturbation dans ce cas, calculer les nouvelles valeurs des énergies propres au premier ordre en perturbation.

Réponse :

le raisonnement en perturbation est valide si et seulement si $|W_{ij}| \ll |E_i^{(0)} - E_j^{(0)}| \quad \forall i, j$
où W_{ij} sont les éléments de la matrice \hat{W} et $E_i^{(0)}, E_j^{(0)}$ sont les énergies non perturbées des niveaux i et j respectivement.

$$E_i^{(1)} = \langle \alpha(0) | \hat{W} | \alpha(0) \rangle$$

$$E \approx E_i^{(0)} + E_i^{(1)}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta - \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\alpha + \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

on déduit $E_i^{(1)} = 0$ et donc $E \approx E_i^{(0)}$ au premier ordre. \hat{A} perturb.