

THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉE

PCs

Corrigé

Etude d'un réacteur nucléaire à caloporteur gaz à haute température

Corrigé

Dans ce problème, on étudie les principales caractéristiques énergétiques d'un concept de réacteur nucléaire à caloporteur gaz à cycle direct à haute température (HTR). Le circuit primaire d'un tel réacteur est constitué d'un cœur nucléaire, d'une turbine, d'un échangeur et d'un compresseur (voir Fig. 1). On convient de numéroté les différents états du fluide caloporteur comme indiqué sur la Fig. 1.

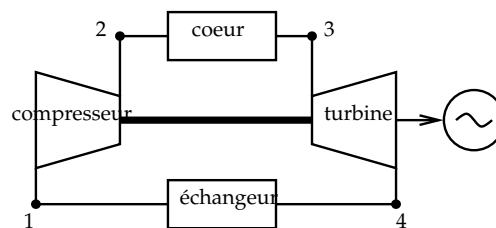


FIGURE 1 – Représentation schématique d'un HTR.

Le fluide est comprimé à la traversée du compresseur ; cette compression est caractérisée par le rapport de compression r_p . L'énergie libérée sous forme calorifique par la réaction de fission nucléaire dans le cœur du réacteur est alors cédée au fluide caloporteur à haute pression. Le fluide se détend à la traversée de la turbine et fournit ainsi à la turbine une puissance sous forme mécanique. Une partie de cette puissance mécanique est fournie au compresseur et l'autre partie à l'alternateur permettant ainsi de produire de l'électricité. À la sortie de la turbine, la température du fluide est encore élevée et doit être abaissée avant de rentrer de nouveau dans le compresseur. Le fluide caloporteur doit donc céder une partie de son énergie à l'extérieur à travers l'échangeur ; il le cède par exemple à un fluide d'un circuit secondaire non représenté ici. Dans ce concept de réacteur, la puissance électrique est générée grâce au travail récupéré à la turbine du circuit *primaire*, raison pour laquelle on parle de cycle *direct*.

On supposera que les échanges de chaleur se font à pression constante, que les compression et détente sont adiabatiques et que l'écoulement du fluide dans le circuit est stationnaire. On supposera en outre que les canalisations sont adiabatiques et on négligera les pertes de pression dans les canalisations. On supposera enfin que les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables par rapport aux autres contributions.

Le fluide caloporteur du circuit primaire est de l'hélium dont le comportement thermodynamique peut être approché avec une bonne précision par une loi d'état de gaz parfait. Ses capacités calorifiques massiques à pression constante et à volume constant sont considérées constantes. Les données relatives au cycle et au fluide sont données au Tab. 1.

Description	Variable	Valeur
Température maximale du fluide caloporteur		850°C
Température minimale du fluide caloporteur		30°C
Pression de sortie du compresseur		72 bar
Taux de détente de la turbine	r_p	2.7
Puissance thermique du cœur	\dot{Q}_c	600 MW
Capacité calorifique massique à pression constante	C_p	5.2 kJ/(kg.K)
Rapport des capacités calorifiques	γ	1.67

TABLE 1 – Données de dimensionnement d'un réacteur HTR.

L'objectif est d'étudier les caractéristiques principales de ce cycle. L'ensemble des hypothèses faites permettent de modéliser le cycle avec un niveau d'approximation permettant de déterminer des ordres de grandeur seront et d'appréhender certains grands principes.

1 Description générale du cycle

On suppose que la compression et la détente sont *réversibles* ; cela suppose des transformations élémentaires infiniment lentes. On admet ici que, ces transformations étant en outre adiabatiques, elles sont isentropiques : l'entropie du fluide ne varie pas au cours de la transformation. Si cette hypothèse constitue une approximation de la réalité physique, comme tout modèle physique, elle est ici parfaitement adaptée pour décrire le principe de fonctionnement de ce cycle.

1.1 Diagramme de Mollier

Tracer l'allure du cycle dans un diagramme de Mollier.

On donnera les expressions $h(s)$ correspondant à chaque portion de courbe.

Correction

Un gaz parfait à C_p constant est caractérisé par les fonctions d'état suivantes :

$$h(T) = h_0 + C_{p0} (T - T_0)$$

$$s(P, T) = s_0 + C_{p0} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - r \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

Compression et détente

La compression étant isentropique, elle est caractérisée par la condition $s_2 = s_1$ qui se traduit par la condition suivante en termes de pression et température

$$C_{p0} \ln(T_2) - r \ln(P_2) = C_{p0} \ln(T_1) - r \ln(P_1)$$

soit

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{C_{p0}} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^r$$

Or, pour un gaz parfait

$$C_{p0} - C_{v0} = r$$

et

$$\gamma = \frac{C_{p0}}{C_{v0}}$$

d'où l'expression suivante de T_2

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 r_p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

(P_2/P_1) est le rapport de compression $r_p > 1$; on a donc $T_2 > T_1$ car $(\gamma - 1)/\gamma > 0$.

Or, pour ce fluide

$$h = h_1 + C_{p0} (T - T_1)$$

Par conséquent

$$h_2 > h_1$$

Pour la détente, le raisonnement est le même mais on a $P_4 < P_3$ et donc $h_4 < h_3$.

Échanges thermiques

On cherche à déterminer l'expression de $h(s)$ pour les échanges calorifiques. Ces échanges sont supposés s'effectuer à pression constante.

À pression constante, l'expression de $s(P, T)$ montre que

$$T = T_0 \exp\left(\frac{s - s_0}{Cp_0}\right)$$

L'expression $h(P, T)$ permet alors d'obtenir

$$h(s) = h_0 + Cp_0 T_0 \left[\exp\left(\frac{s - s_0}{Cp_0}\right) - 1 \right]$$

Dans le cas où l'on chauffe le fluide, on lui fournit de l'énergie et h augmente et donc s également. C'est l'inverse lorsqu'on le refroidit.

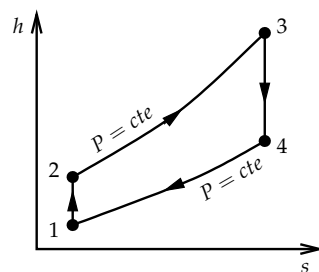
Les grandeurs de référence h_0 et T_0 de l'expression ci-dessus peuvent être prises pour l'un des états de la transformation considérée. On a ainsi

$$h_{2 \rightarrow 3}(s) = h_2 + Cp_0 T_2 \left[\exp\left(\frac{s - s_2}{Cp_0}\right) - 1 \right]$$

$$h_{4 \rightarrow 1}(s) = h_1 + Cp_0 T_1 \left[\exp\left(\frac{s - s_1}{Cp_0}\right) - 1 \right]$$

Le fait que $T_2 > T_1$ se traduit graphiquement par le fait que la courbe $2 \rightarrow 3$ se situe au-dessus de la courbe $4 \rightarrow 1$ et que l'écart entre ces deux courbes augmente avec s .

On obtient finalement le diagramme suivant.



1.2 Pressions et températures

Préciser en quels points le fluide caloporteur atteint ses températures minimale et maximale et la valeur de la pression aux différents points du circuit.

Correction

L'enthalpie d'un gaz parfait n'étant fonction que de la température et étant en outre une fonction croissante de la température, le diagramme de Mollier montre que la température la plus basse est atteinte au point 1, c'est-à-dire à la sortie de l'échangeur, et que la température la plus élevée est atteinte au point 3, c'est-à-dire à la sortie du cœur.

On a donc

$$T_1 = 303,15 \text{ K}$$

$$T_3 = 1123,15 \text{ K}$$

Il est précisé dans l'énoncé que la pression en sortie de compresseur est de 72 bar ; on a donc

$$P_2 = 72 \text{ bar}$$

L'échange thermique dans le cœur étant supposé être à pression constante, on a

$$P_3 = P_2 = 72 \text{ bar}$$

Le taux de détente à la turbine est r_p et on a donc

$$P_4 = \frac{P_3}{r_p}$$

soit

$$P_4 = \frac{72}{2.7} = 26.67 \text{ bar}$$

Enfin, l'échangeur étant supposé être isobare, on a

$$P_1 = P_4 = 26.67 \text{ bar}$$

2 Quelques caractéristiques générales

Pour cette partie, on admet que, l'écoulement étant stationnaire et les variations des énergies potentielle et cinétique étant négligeables à la traversée de chaque composant du cycle, le bilan d'énergie du fluide compris entre l'entrée et la sortie d'un composant conduit à l'équation suivante :

$$\dot{m} (h_s - h_e) = \dot{W} + \dot{Q}$$

où \dot{m} est le débit de masse, \dot{W} est la puissance reçue par le fluide sous forme mécanique et \dot{Q} est la puissance reçue par le fluide sous forme de chaleur. Le débit de masse est le même à la traversée de chaque composant du circuit.

La puissance calorifique reçue par le fluide au compresseur et à la turbine est nulle et la puissance mécanique fournie au fluide dans les échangeurs est nulle également.

2.1 Puissances mécaniques

À l'aide du diagramme de Mollier, justifier le fait que la puissance mécanique fournie à l'alternateur est positive.

Correction

L'application du bilan d'énergie au compresseur et à la turbine donne respectivement :

$$\dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{W}_c$$

$$\dot{m} (h_4 - h_3) = \dot{W}_t$$

Le diagramme de Mollier montre que

$$h_2 > h_1$$

$$h_4 < h_3$$

Par conséquent

$$\dot{W}_c > 0$$

$$\dot{W}_t < 0$$

Ces relations signifient que la puissance *reçue* par le fluide au compresseur est positive alors qu'elle est négative à la turbine ; à la turbine, le fluide *fournit* donc de la puissance à l'extérieur.

Par ailleurs, le diagramme de Mollier montre que

$$|h_4 - h_3| > |h_2 - h_1|$$

La puissance fournie à l'extérieur à la turbine est donc supérieure à la puissance reçue par le fluide au compresseur, ce qui se traduit par

$$-\dot{W}_t > \dot{W}_c$$

Dans le cycle considéré, la puissance du compresseur provient de la turbine, ce qui est possible du fait de cette inégalité : la turbine fournit plus de puissance que celle nécessaire à faire fonctionner le compresseur. Il reste de la puissance mécanique disponible qui est fournie à l'alternateur. Ainsi, la puissance *fournie* à l'alternateur est

$$\dot{W}_{alt} = -\dot{W}_t - \dot{W}_c > 0$$

2.2 Interprétation

Montrer que, pour ces transformations, on a

$$\dot{W} = \dot{m} \int_e^s v dP$$

Pourquoi doit-on comprimer le gaz avant de le chauffer et non pas l'inverse ?

Correction

Puisque

$$\dot{W} = \dot{m} C p_0 (T_s - T_e)$$

on cherche à exprimer l'intégrale en fonction de T uniquement, c'est-à-dire à exprimer $v dP$ en fonction de dT uniquement.

Pour une transformation isentropique d'un gaz parfait à Cp constant, on a

$$r \frac{dP}{P} = C p_0 \frac{dT}{T}$$

En multipliant cette équation par (Pv/r) , on obtient

$$v dP = \frac{Pv}{r} C p_0 \frac{dT}{T} = C p_0 dT$$

Par conséquent

$$\int_e^s v dP = C p_0 (T_s - T_e) = h_s - h_e$$

On peut noter que si cette relation a été montrée ici dans le cas particulier d'un gaz parfait à Cp constant, on peut montrer qu'elle est en fait vérifiée quelle que soit l'équation d'état du fluide. Elle n'est cependant vérifiée *que si la transformation est réversible*.

Cette relation montre que le fait que la puissance mécanique à la turbine est supérieure à celle au compresseur, et donc que la puissance fournie à l'alternateur est positive, est dû au fait que le volume massique du fluide à la turbine est supérieur à celui au compresseur. C'est la raison pour laquelle le fluide est chauffé entre le compresseur et la turbine : cela permet de dilater le fluide, c'est-à-dire d'augmenter son volume massique, et ainsi de récupérer plus de puissance qu'on en fournit.

2.3 Puissances calorifiques

Montrer que la puissance calorifique cédée par le fluide à l'extérieur dans l'échangeur est positive.

Montrer que la puissance calorifique fournie par le cœur nucléaire est supérieure à celle cédée à l'extérieur.

Correction

Le bilan d'énergie appliqué au fluide dans l'échangeur donne :

$$\dot{m} (h_1 - h_4) = \dot{Q}_e$$

où \dot{Q}_e est la puissance calorifique fournie par l'extérieur au fluide. Pour montrer que $-\dot{Q}_e > 0$, il faut montrer que $h_4 > h_1$. Cette inégalité se voit directement sur le diagramme de Mollier. On peut cependant en faire une démonstration plus formelle en utilisant des relations thermodynamiques générales.

Du fait du bilan d'énergie appliqué au fluide compris dans le cœur, $h_3 > h_2$. Or, on a la relation générale

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = C p > 0$$

donc $T_3 > T_2$. Or, on a la relation générale

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{C p}{T} > 0$$

donc $s_3 > s_2$.

Or $s_4 = s_3$ et $s_1 = s_2$, donc $s_4 > s_1$. En suivant le même raisonnement que ci-dessus, on aboutit à la conclusion que $h_4 > h_1$.

Cela signifie qu'une partie de la puissance calorifique fournie par le cœur nucléaire est cédée à l'extérieur : elle n'est pas intégralement transformée en puissance mécanique. Ce résultat montré dans ce cas particulier est en fait tout à fait général et constitue le second principe de la thermodynamique : on ne peut pas transformer intégralement la puissance calorifique en puissance mécanique.

En appliquant le bilan d'énergie à chaque partie du cycle, on obtient :

$$\dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{W}_c > 0$$

$$\dot{m}(h_3 - h_2) = \dot{Q}_c > 0$$

$$\dot{m}(h_4 - h_3) = \dot{W}_t < 0$$

$$\dot{m}(h_1 - h_4) = \dot{Q}_e < 0$$

En additionnant ces relations, on obtient :

$$0 = \dot{W}_c + \dot{Q}_c + \dot{W}_t + \dot{Q}_e$$

soit

$$\dot{Q}_c + \dot{Q}_e = -\dot{W}_t - \dot{W}_c = \dot{W}_{alt} > 0$$

Par conséquent

$$\dot{Q}_c > -\dot{Q}_e$$

2.4 Rendement énergétique

Définir le rendement énergétique de ce cycle.

Montrer que ce rendement est inférieur à 1.

Correction

Le rendement énergétique est défini comme le rapport entre la puissance utile et la puissance dépensée. Dans le cas de ce cycle, la puissance utile est celle fournie sous forme mécanique à l'alternateur \dot{W}_{alt} et la puissance dépensée est celle fournie sous forme calorifique par le cœur du réacteur nucléaire \dot{Q}_c . Le rendement énergétique est donc

$$\eta_{en} = \frac{\dot{W}_{alt}}{\dot{Q}_c}$$

Or

$$\dot{W}_{alt} = -\dot{W}_t - \dot{W}_c$$

On a donc

$$\eta_{en} = \frac{-\dot{W}_t - \dot{W}_c}{\dot{Q}_c} = \frac{\dot{Q}_c + \dot{Q}_e}{\dot{Q}_c} = 1 + \frac{\dot{Q}_e}{\dot{Q}_c}$$

Du fait que $\dot{Q}_e < 0$, $\dot{Q}_c > 0$ et $|\dot{Q}_e/\dot{Q}_c| < 1$

$$0 < \eta_{en} < 1$$

3 Etats du fluide au cours du cycle

3.1 Température de sortie du compresseur

Déterminer l'expression de la température de sortie du compresseur en fonction de T_1 , r_p et γ .

Donner sa valeur numérique.

Correction

On connaît l'état du fluide à l'entrée du compresseur. Le fluide est divariant et il est donc nécessaire de connaître 2 variables d'état pour déterminer complètement son état à la sortie du compresseur. On connaît sa pression : on connaît la pression à l'entrée et on connaît le rapport de compression

$$P_2 = r_p P_1$$

La deuxième information nécessaire pour déterminer une seconde variable d'état provient du fait que la compression est isentropique :

$$s_2 = s_1$$

Connaissant les deux variables d'état P_2 et s_2 , l'état du fluide à la sortie du compresseur est entièrement déterminé, ce qui permet en particulier de déterminer sa température :

$$T_2 = T(P_2, s_2)$$

Cette méthodologie se décline comme suit dans le cas particulier du fluide considéré ici qui est un gaz parfait à C_p constant.

Dans ce cas particulier, l'expression de $s(P, T)$ est

$$s(P, T) = s_0 + C_{p0} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - r \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

La condition $s_2 = s_1$ se traduit donc par

$$C_{p0} \ln(T_2) - r \ln(P_2) = C_{p0} \ln(T_1) - r \ln(P_1)$$

soit

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{C_{p0}} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^r$$

Or, pour un gaz parfait

$$C_{p0} - C_{v0} = r$$

et

$$\gamma = \frac{C_{p0}}{C_{v0}}$$

d'où l'expression suivante de T_2

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 r_p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_2 = (273.15 + 30) \times (2.7)^{\frac{1.67-1}{1.67}} = 451.56 \text{ K} = 178.41^\circ\text{C}$$

3.2 Température de sortie de la turbine

Déterminer la température du fluide à la sortie de la turbine en fonction de T_3 , r_p et γ .
Donner sa valeur numérique.

Correction

Le raisonnement suivi pour la turbine est identique à celui suivi pour la compression.
On connaît la pression à la sortie de la turbine du fait du rapport de détente égal à $1/r_p$:

$$P_4 = \frac{1}{r_p} P_3$$

La détente étant isentropique, on a $s_4 = s_3$, ce qui se traduit formellement par

$$s(P_4, T_4) = s(P_3, T_3)$$

Connaissant l'état à l'entrée de la turbine (P_3, T_3) , ces deux équations constitue un système permettant de déterminer les deux inconnues (P_4, T_4) .

Dans le cas particulier du fluide considéré ici qui est un gaz parfait à C_p constant, la condition d'égalité des entropies se traduit par

$$T_4 = T_3 \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

soit

$$T_4 = T_3 \left(\frac{1}{r_p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_4 = (273.15 + 850) \times \left(\frac{1}{2.7} \right)^{\frac{1.67-1}{1.67}} = 754 \text{ K} = 480.85^\circ\text{C}$$

On obtient donc l'état récapitulatif suivant des états du fluide au cours du cycle.

	P (bar)	T (K)	T ($^\circ\text{C}$)
1	26.67	303.15	30
2	72	451.56	178.41
3	72	1123.15	850
4	26.67	754	480.85

4 Puissances échangées

4.1 Débit de masse d'hélium

Déterminer le débit de masse d'hélium à travers le circuit.

Correction

Le bilan d'énergie appliqué au fluide compris entre l'entrée et la sortie du cœur s'écrit

$$\dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{Q}_c$$

soit

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_c}{h_3 - h_2}$$

On connaît la puissance calorifique fournie par le cœur nucléaire \dot{Q}_c ainsi que l'état du fluide aux bornes du cœur et donc $(h_3 - h_2)$.

Le comportement thermodynamique du fluide étant approché par celui d'un gaz parfait à C_p constant, on a

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_c}{C_p (T_3 - T_2)}$$

soit

$$\dot{m} = \frac{600 \times 10^6}{5.2 \times 10^3 \times (1123.15 - 451.56)} = 171.8 \text{ kg/s}$$

4.2 Puissances échangées et rendement énergétique

Déterminer la puissance fournie au fluide à travers chaque composant du circuit.

En déduire la puissance fournie à l'alternateur.

En déduire la valeur du rendement énergétique du cycle.

Correction

Pour déterminer l'ensemble des puissances fournies au fluide à travers un composant du circuit, on applique le bilan d'énergie :

$$\dot{m} (h_s - h_e) = \dot{W} + \dot{Q}$$

Le gaz étant considéré comme un gaz parfait à C_p constant, on a

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W} + \dot{Q}$$

Puissance mécanique fournie au fluide à travers le compresseur

L'application de la relation précédente au compresseur donne :

$$\dot{W}_c = \dot{m} C_p (T_2 - T_1)$$

soit

$$\dot{W}_c = 171.8 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (451.56 - 303.15) = 132.6 \text{ MW}$$

Cette puissance est bien positive : le compresseur fournit de l'énergie au fluide.

Puissance mécanique fournie au fluide à travers la turbine

L'application du bilan d'énergie au fluide compris entre l'entrée et la sortie de la turbine donne :

$$\dot{W}_t = \dot{m} C_p (T_4 - T_3)$$

soit

$$\dot{W}_t = 171.8 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (754 - 1123.15) = -329.8 \text{ MW}$$

Cette puissance est *négative* car le fluide *cède* son énergie thermique sous forme d'énergie mécanique à la turbine, si bien que la puissance fournie par la turbine au fluide est négative.

Puissance calorifique à l'échangeur

L'application du bilan d'énergie au fluide compris entre l'entrée et la sortie de l'échangeur donne :

$$\dot{Q}_e = \dot{m} C_p (T_1 - T_4)$$

soit

$$\dot{Q}_e = 171.8 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (303.15 - 754) = -402.8 \text{ MW}$$

Cette puissance est bien *négative* car le fluide caloporteur *cède* son énergie au fluide du circuit secondaire.

Puissance mécanique fournie à l'alternateur

La puissance fournie par la turbine à l'alternateur est donnée par :

$$\dot{W}_{alt} = -(\dot{W}_t + \dot{W}_c)$$

soit

$$\dot{W}_{alt} = -(-329.8 + 132.6) = 197.2 \text{ MW}$$

Cette puissance est bien *négative* car le fluide caloporteur *cède* son énergie au fluide du circuit secondaire.

Récapitulatif

	\dot{W} (MW)	\dot{Q} (MW)
Compresseur	132.6	0
Cœur	0	600
Turbine	-329.8	0
Echangeur	0	-402.8
Alternateur	197.2	0

On vérifie que la somme des énergies fournies au fluide sur le cycle est nulle : à l'issue du cycle, le fluide revient à son état initial et il n'a donc reçu aucune énergie de l'extérieur.

Rendement énergétique

On rappelle que le rendement énergétique de ce cycle est donné par

$$\eta_{en} = \frac{\dot{W}_{alt}}{\dot{Q}_c}$$

soit

$$\eta_{en} = \frac{197.2}{600} = 32.9\%$$

Ce résultat signifie qu'environ un tiers de l'énergie thermique fournie par le cœur nucléaire est effectivement transmis à l'alternateur pour fournir de la puissance électrique. Les deux tiers restant de la puissance thermique initiale sont évacués sous forme de chaleur à travers l'échangeur. On peut essayer de valoriser cette puissance sous forme mécanique. Mais elle ne pourra *jamais* être intégralement transformée sous forme de puissance mécanique. De ce fait, on peut se demander quelle puissance mécanique maximale peut être extraite de cette puissance calorifique. C'est la raison pour laquelle est introduite la notion d'exergie.

Etude du cycle d'un turbo-réacteur

Corrigé

Les moteurs à turbine à gaz sont largement utilisés pour la propulsion des avions car ils sont légers et compacts. Les turbines à gaz des avions fonctionnent sur le principe d'un cycle *ouvert* schématisé sur la figure 1.

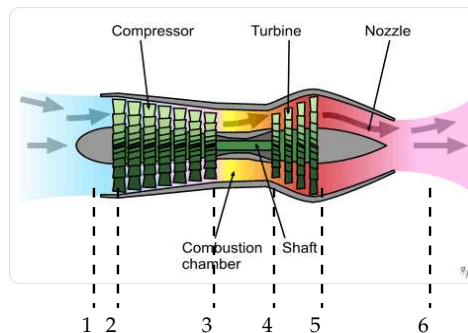


FIGURE 1 – Schéma de principe de fonctionnement d'un turbo-réacteur

Le gaz entre dans le réacteur et passe dans un diffuseur pour diminuer la vitesse en entrée du compresseur. Le gaz est comprimé par le compresseur et entre dans la chambre de combustion où il est chauffé. Le gaz est alors partiellement détendu dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet d'accélérer le gaz, cette accélération servant à propulser l'avion.

On admet que, moyennant quelques approximations, un bilan de quantité de mouvement permet de montrer que la force appliquée par le moteur à l'air est la suivante :

$$F = \dot{m} (V_s - V_e)$$

où \dot{m} est le débit d'air dans le moteur et V_s et V_e sont les vitesses du gaz respectivement de sortie et d'entrée dans le moteur.

Par application du principe de l'action et de la réaction, la force appliquée par l'air sur le moteur, et donc l'avion, est l'opposée de la force ci-dessus. En régime de croisière (*i.e.* lorsque la vitesse de l'avion est constante), cette force sert à contre-balancer la force de frottement que l'air applique sur l'avion.

Soit V_a la vitesse de l'avion dans l'air supposé être au repos. La puissance développée par la force de propulsion est donnée par

$$\dot{q}_p = F \cdot V_a$$

Soit un avion volant à une vitesse de 260 m/s à une altitude où l'air est à une pression de 34.5 kPa et une température de -40°C . Le compresseur a un rapport de pression de 10 et la température des

gaz à l'entrée de la turbine est de 1093°C . L'air entre dans le compresseur à un débit massique de 45 kg/s .

Le but de ce problème est de déterminer l'efficacité du moteur. Pour cela, on supposera que le gaz a le comportement d'un gaz parfait à C_p et C_v constants et on prendra $C_p = 1.1 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $r = 0.287 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ et $\gamma = 1.353$.

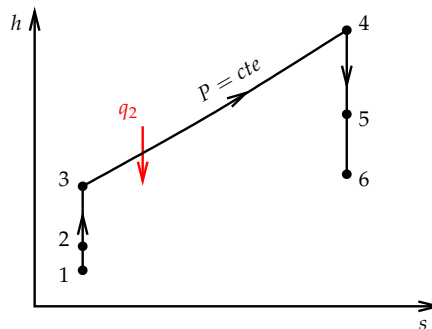
1 Cycle du gaz

Bien que les compositions du gaz à l'entrée et la sortie de la chambre de combustion soient différentes, pour simplifier la modélisation, on suppose que la chambre de combustion sert uniquement à réchauffer l'air et que les propriétés de l'air (par ex. sa masse molaire) ne sont pas modifiées par ce changement de composition. En outre, on suppose que la pression dans la chambre de combustion est uniforme. On suppose enfin que toutes les compressions et détente sont adiabatiques et réversibles.

Dans ces conditions, représenter les différents états du gaz à la traversée du réacteur sur un diagramme de Mollier.

Correction

Le cycle thermodynamique idéal d'un tel moteur est représenté sur la figure suivante.



Les compressions et détente étant adiabatiques et réversibles, elles sont isentropiques. L'enthalpie étant une fonction croissante de la pression, h augmente lors d'une compression et diminue lors d'une détente. La chaleur est supposée être fournie à pression constante qui est une exponentielle pour un gaz parfait à C_p constant.

La compression dans le diffuseur et la détente dans la tuyère sont sans apport de chaleur et de travail.

2 Etat du gaz à l'entrée du compresseur

Pour simplifier, on considère que le diffuseur présent en amont du compresseur est idéal, dans le sens où la vitesse du gaz en entrée du compresseur est si faible que l'énergie cinétique du gaz peut y être négligée devant les autres contributions énergétiques.

En négligeant le travail et la chaleur fournie au gaz dans le diffuseur, déterminer la différence d'enthalpie massique du gaz entre l'entrée et la sortie du diffuseur.

En déduire la température T_2 à l'entrée du compresseur.

Déterminer la pression P_2 à l'entrée du compresseur.

Correction

On considère comme système le gaz entre l'entrée et la sortie du diffuseur. Le bilan d'énergie appliqué à ce système s'écrit :

$$\frac{\partial (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

où \mathcal{U} , \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p sont les énergies interne, cinétique et potentielle du système, h , e_c et e_p sont les enthalpies, énergies cinétique et potentielle massiques, \dot{m} est le flux de masse, \dot{Q} et \dot{W}' sont les puissances calorifique et mécanique fournies au système.

L'écoulement étant supposé être stationnaire, le membre de gauche est nul et \dot{m} est constant entre l'entrée et la sortie. Enfin, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle. On a donc :

$$\dot{m} [h + e_c]_e^s = \dot{Q} + \dot{W}'$$

Cette relation est vraie pour tous les composants du turbo-réacteur.

Si on l'applique au cas du diffuseur, on obtient :

$$\dot{m} \left[h_2 - \left(h_1 + \frac{V_a^2}{2} \right) \right] = 0$$

soit

$$h_2 - h_1 = \frac{V_a^2}{2}$$

Le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à C_p constant, on a

$$h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1)$$

On a donc :

$$T_2 = T_1 + \frac{V_a^2}{2 C_p}$$

L'application numérique donne :

$$T_2 = 263.88 \text{ K}$$

La transformation du fluide à la traversée du diffuseur est adiabatique réversible et le fluide ayant un comportement de gaz parfait à γ constant, on peut appliquer la formule

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste}$$

On en déduit donc

$$P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

L'application numérique donne :

$$P_2 = 55.44 \text{ kPa}$$

3 Etat à la sortie du compresseur

Déterminer la pression P_3 en sortie de compresseur.

En déduire la température T_3 .

Correction

Le compresseur est supposé avoir un rapport de compression de 10, ce qui signifie que

$$P_3 = 10 P_2 = 554.4 \text{ kPa}$$

La compression étant supposée être adiabatique réversible et le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à γ constant, on peut appliquer la formule

$$T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

L'application numérique donne :

$$T_3 = 481.27 \text{ K}$$

4 Travail de compression et de détente

Déterminer le travail du compresseur et en déduire l'état du gaz à la sortie de la turbine.

Correction

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers le compresseur donne :

$$\dot{m} C_p (T_3 - T_2) = \dot{W}'_c = 10.761 \text{ MW}$$

Cette puissance est fournie par la turbine. On a donc

$$\dot{W}'_c = -\dot{W}'_t$$

où \dot{W}'_t est la puissance fournie par la turbine au gaz ; elle est donc bien négative.

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers la turbine donne :

$$\dot{m} C_p (T_5 - T_4) = \dot{W}'_t = -\dot{W}'_c = \dot{m} C_p (T_2 - T_3)$$

soit

$$T_5 = T_4 + T_2 - T_3$$

L'application numérique donne :

$$T_5 = 1148.76 \text{ K}$$

On a également

$$P_5 = P_4 \left(\frac{T_5}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

L'application numérique donne :

$$P_5 = 285.38 \text{ kPa}$$

5 Energie de combustion

Déterminer l'énergie fournie sous forme de chaleur dans la chambre de combustion.

Correction

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers la chambre de combustion donne :

$$\dot{m} C_p (T_4 - T_3) = \dot{Q}$$

On obtient :

$$\dot{Q} = 43.8 \text{ MW}$$

6 Etat à la sortie de la tuyère

Exprimer la température à la sortie de la tuyère en fonction de P_5 , T_5 et P_6 . Donner sa valeur.

En négligeant l'énergie cinétique du gaz à la sortie de la turbine par rapport aux autres contributions énergétiques ainsi que le travail des forces extérieures et la chaleur fournie au gaz, déterminer la vitesse de sortie du gaz V_6 .

Correction

Dans la tuyère, on a :

$$T_6 = T_5 \left(\frac{P_6}{P_5} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 661.83 \text{ K}$$

Le bilan d'énergie appliqué au gaz à travers la tuyère donne :

$$Cp (T_6 - T_5) + \frac{V_6^2}{2} = 0$$

soit

$$V_6 = \sqrt{2 Cp (T_5 - T_6)} = 1035 \text{ m/s}$$

7 Récapitulatif

Récapituler les résultats sous la forme de tableaux donnant l'état du fluide aux différents points caractéristiques de son évolution et les puissances mécaniques et thermiques mises en jeu.

Correction

Les conditions thermodynamiques du gaz aux différents points caractéristiques de son évolution sont récapitulées dans le tableau suivant :

	P (kPa)	T (K)	V (m/s)
①	34.5	233.15	260
②	55.44	263.88	0
③	554.4	481.27	0
④	554.4	1366.15	0
⑤	285.38	1148.76	0
⑥	34.5	661.83	1035

Les différentes puissances mécaniques et thermiques mises en jeu au cours de la transformation du fluide sont récapitulées dans le tableau suivant :

	\dot{Q} (kW)	\dot{W} (kW)
Diffuseur	0	0
Compresseur	0	10761
Combustion	43800	0
Turbine	0	-10761
Tuyère	0	0

8 Puissance de propulsion et rendement du turbo-réacteur

Déterminer la puissance \dot{q}_p développée par la force de propulsion.
En déduire le rendement du turbo-réacteur.

Correction

On a :

$$\dot{q}_p = F \cdot V_a = \dot{m} (V_s - V_e) \cdot V_a$$

avec $V_e = V_a$.

On obtient :

$$\dot{q}_p = 9.068 \text{ MW}$$

Le rendement est le rapport entre la puissance produite et la puissance consommée. Ici, la puissance produite est celle qui sert à propulser l'avion, soit \dot{q}_p et la puissance consommée est celle qui sert à chauffer le gaz dans la chambre de combustion, soit \dot{Q} . On en déduit :

$$\eta = \frac{\dot{q}_p}{\dot{Q}} = 21\%$$

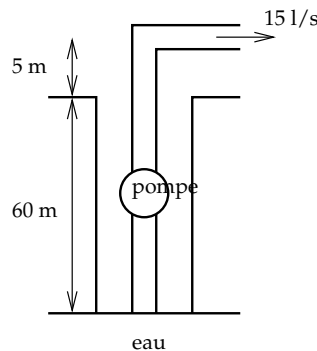
PC N°2

Dimensionnement d'une pompe de relevage

Corrigé

Soit une source souterraine dont la surface libre se situe à 60 m sous le niveau du sol. L'eau doit être élevée à 5 m au-dessus du sol par une pompe. Le diamètre du tuyau est 10 cm à l'entrée et 15 cm à la sortie.

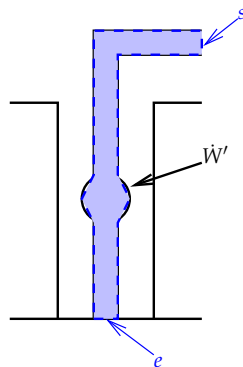
La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'eau est supposée être incompressible à la pression atmosphérique.



En négligeant les échanges de chaleur avec l'extérieur et dus aux frottements dans la canalisation, déterminer la puissance à fournir à la pompe pour obtenir un écoulement stationnaire à un débit de 15 l/s.

Correction

On considère comme système l'eau comprise entre l'entrée et la sortie du tuyau tel que représenté sur la figure ci-dessous.



Ce système est un système ouvert. Le bilan d'énergie pour ce système s'écrit :

$$\frac{\partial (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{\partial t} = \sum_{e \rightarrow s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{W}' + \dot{Q}$$

où \mathcal{U} , \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p sont les énergies respectivement interne, cinétique et potentielle du système, où h , e_c et e_p sont respectivement l'enthalpie, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par unité de masse, où \dot{W}' et \dot{Q} sont les puissances respectivement mécanique et calorifique fournies au système et où \dot{m} sont les débits de masse.

Par ailleurs, le bilan de masse s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m}$$

où \mathcal{M} est la masse du système.

L'écoulement étant stationnaire, les membres de gauche des deux équations sont nuls. Par ailleurs, le système ne comprenant qu'une entrée et qu'une sortie, le bilan de masse donne :

$$\dot{m}_s + \dot{m}_e = 0$$

On note simplement \dot{m} le flux de masse sortant (qui est positif).

Les échanges de chaleur étant négligés, l'équation de bilan d'énergie devient :

$$\dot{m} [h + e_c + e_p]_e^s = \dot{W}'$$

Pour déterminer les énergies cinétiques à l'entrée et à la sortie, il est nécessaire de connaître la vitesse de l'eau à ces endroits. Pour les calculer, on utilise la définition du flux de masse :

$$\dot{m} = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

où A est la surface considérée (ici d'entrée ou de sortie), ρ est la masse volumique locale du fluide sur cette surface, \mathbf{v} est la vitesse locale du fluide et \mathbf{n} est la normale unitaire de la surface dirigée vers l'extérieur du système. Si l'on prend comme surface une section droite de canalisation et si on suppose que la vitesse est uniforme sur la surface et colinéaire à la normale, on a :

$$\dot{m} = \rho v_e A_e = \rho v_s A_s$$

où v est la norme de la vitesse et A est l'aire de la surface.

On a donc

$$v_e = \frac{\dot{m}}{\rho A_e} = \frac{15 \times 1}{1000 \times \pi \times (0.1)^2 / 4} = 1.9 \text{ m/s}$$

$$v_s = \frac{\dot{m}}{\rho A_s} = \frac{15 \times 1}{1000 \times \pi \times (0.15)^2 / 4} = 0.85 \text{ m/s}$$

La variation d'énergie cinétique massique est donc

$$[e_c]_e^s = \frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} = -1.46 \text{ J/kg}$$

La différence d'énergie potentielle massique est donnée par

$$[e_p]_e^s = g(z_s - z_e) = 9.81 \times 65 = 638 \text{ J/kg}$$

Il reste à déterminer la variation d'enthalpie. Pour cela, il est nécessaire de connaître l'état thermodynamique du fluide à l'entrée et à la sortie de la canalisation. Tout d'abord, on peut considérer qu'il n'y a pas de variation de température entre l'entrée et la sortie. Par ailleurs, à l'entrée et à la

sortie de la canalisation, l'eau est en contact avec l'air environnant et il y a équilibre des pressions de l'eau et de l'air. L'air étant globalement en équilibre, la pression de l'air est la pression hydrostatique :

$$P_s - P_e = -\rho_{air} g (z_s - z_e)$$

Or, la masse volumique de l'air est beaucoup plus faible que celle de l'eau et on peut donc négliger les variations de la pression de l'air.

Par conséquent, la température et la pression de l'eau en entrée et en sortie de canalisation sont égales (en première approximation). Or, l'enthalpie étant une fonction d'état, sa valeur ne dépend que de l'état de l'eau, cet état étant le même à l'entrée et à la sortie de la canalisation. On a donc :

$$[h]_e^s \simeq 0$$

On a donc

$$\dot{W}' = \dot{m} [h + e_c + e_p]_e^s \simeq 15 \times (638 - 1.46) = 5.54 \text{ kW}$$

Discuter les différentes contributions de cette puissance.

Correction

On remarque que la variation d'énergie cinétique est beaucoup plus faible que la variation d'énergie potentielle. L'essentiel de la puissance de la pompe est donc liée à la variation d'énergie potentielle. Il est en effet clair que si l'on devait faire le travail à la place de la pompe, ce qui nous fatiguerait le plus serait le fait de monter l'eau et pas de lui donner de la vitesse !

Cet exemple montre que, suivant les applications, il est important de négliger ou non certaines parties de l'énergie totale. Dans cet exemple, il est essentiel de prendre en compte la variation d'énergie potentielle alors que dans d'autres applications, elle peut être négligée alors que la variation d'énergie cinétique doit impérativement être prise en compte.

Revenons à présent sur l'hypothèse de faible variation de la pression atmosphérique. On a

$$P_s - P_e = -\rho_{air} g (z_s - z_e) \simeq -1 \times 9.81 \times 65 = -638 \text{ Pa}$$

Or

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P < \frac{1}{\rho}$$

Par conséquent :

$$h_s - h_e \simeq \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T (P_s - P_e) < \frac{P_s - P_e}{\rho} = \frac{-638}{1000} = -0.638 \text{ J}$$

On vérifie bien que cette variation est 1000 fois plus faible que celle liée à la variation d'énergie potentielle du liquide et qu'elle peut effectivement être négligée.

Notons enfin que l'on a négligé les variations de pression dues au frottement de l'eau sur les parois de la canalisation. Or, cette variation de pression n'est pas nécessairement négligeable, raison pour laquelle il est nécessaire de prévoir une puissance de pompage légèrement supérieure à celle déterminée ici.

Etude d'un cycle pour une chambre froide

Corrigé

1 Questions préliminaires

1.1 Compressions adiabatiques réversible et irréversible

Considérons un état initial du gaz, noté ①, caractérisé par une pression P_0 et une entropie s_1 . On suppose que ce gaz est comprimé de manière adiabatique pour l'amener à une pression P_1 . On note ② l'état du fluide si la compression est réversible et ②' son état si la compression est irréversible.

Représenter graphiquement les états ①, ② et ②' sur un diagramme de Mollier et justifier.

Correction

Les isobares P_0 et P_1 sont représentées sur la figure ci-dessous. Pour un gaz parfait à C_p constant, ce sont des portions d'exponentielles. Une transformation adiabatique réversible est isentropique. L'entropie du gaz dans l'état ② est donc celle du gaz dans l'état ①. D'où le point représentatif de l'état ② de la figure suivante.

Par application du second principe de la thermodynamique, l'entropie d'un système ne peut que croître lors d'une transformation adiabatique irréversible. Par conséquent, l'entropie du gaz dans l'état ②' est supérieure à celle du gaz dans l'état ①. La pression des deux états ② et ②' étant identique, on en déduit le point représentatif de l'état ②' sur la figure suivante.

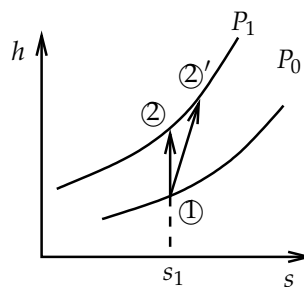


FIGURE 1 – Compressions réversible et irréversible.

1.2 Puissance de compression

Entre les deux transformations réversibles et irréversibles, quelle est celle pour laquelle la puissance nécessaire pour comprimer le fluide de la pression P_0 à la pression P_1 est la plus grande? On pourra s'aider de la représentation graphique pour justifier la réponse.

Correction

On applique le premier principe de la thermodynamique au système ouvert composé du gaz traversant le compresseur. Si l'on néglige les variations d'énergies cinétique et potentielle et pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{W}_c$$

où \dot{m} est le flux de masse traversant le compresseur et \dot{W}_c est la puissance fournie par le compresseur au fluide.

Pour la transformation irréversible, on a :

$$\dot{m} (h_{2'} - h_1) = \dot{W}'_c$$

En soustrayant ces deux relations, on obtient :

$$\dot{m} (h_{2'} - h_2) = \dot{W}'_c - \dot{W}_c$$

Or le graphe montre que $(h_{2'} - h_2) > 0$, ce qui signifie que $(\dot{W}'_c - \dot{W}_c) > 0$ (car $\dot{m} > 0$). Or, pour un compresseur, $\dot{W}_c > 0$. Par conséquent, la puissance nécessaire est plus grande lorsque la transformation est irréversible.

1.3 Puissance de détente

On considère un autre état du gaz, noté ③, caractérisé par une pression P_1 et une entropie $s_3 > s_1$. On suppose que ce gaz est détendu dans une turbine adiabatique pour l'amener à la pression P_0 . On note ④ l'état du fluide si la détente est réversible et ④' son état si la détente est irréversible.

En suivant un raisonnement identique à celui de la compression, pour quelle transformation la puissance récupérée à la turbine est-elle la plus grande ?

Correction

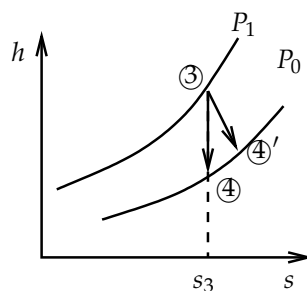


FIGURE 2 – Détentes réversible et irréversible.

En suivant le même raisonnement que pour la compression, on a :

$$\dot{m} (h_{4'} - h_4) = \dot{W}'_d - \dot{W}_d$$

soit

$$-\dot{W}'_d = -\dot{W}_d - \dot{m} (h_{4'} - h_4)$$

Or le graphe montre que $(h_{4'} - h_4) > 0$, ce qui signifie que $-\dot{W}'_d < -\dot{W}_d$ (car $\dot{m} > 0$). Or, pour une turbine, $\dot{W}_d < 0$. Par conséquent, en valeur absolue, la puissance récupérée à la turbine (à savoir $-\dot{W}_d$) est plus faible lorsque la transformation est irréversible.

1.4 Rendement isentropique

Pour une transformation amenant le gaz d'une pression P_1 à une pression P_2 , on définit le rendement isentropique η^{is} de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta_c^{is} = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} & \text{pour une compression adiabatique} \\ \eta_d^{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2^{is}} & \text{pour une détente adiabatique} \end{cases}$$

où h_2^{is} désigne l'enthalpie correspondant à la transformation réversible et h_2 celle correspondant à la transformation irréversible.

Justifier que η_c^{is} et η_d^{is} sont inférieurs à 1.

Correction

Pour une compression adiabatique, on a montré que :

$$\frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\dot{W}_c}{\dot{W}_c'} < 1$$

Le rendement η_c^{is} est donc bien inférieur à 1.

Pour une détente adiabatique, on a montré que :

$$\frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\dot{W}_d}{\dot{W}_d'}$$

Or, $\dot{W}_d' > \dot{W}_d$ et $\dot{W}_d' < 0$, si bien que $(\dot{W}_d / \dot{W}_d') > 1$. On a donc

$$\eta_d^{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2^{is}} < 1$$

2 Refroidissement d'une chambre froide

On étudie une installation permettant de refroidir une chambre froide. Pour cela, on utilise le cycle thermodynamique schématisé sur la figure ci-dessous. Le fluide circulant dans l'installation est un gaz que l'on supposera se comporter comme un gaz parfait dont les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant sont supposées être constantes. On suppose que la turbine et le compresseur sont adiabatiques et que leur rendement isentropique est de 96%. On suppose en outre que toutes les canalisations sont isolées thermiquement, que les pertes de charges dans les canalisations sont négligeables ainsi que les variations d'énergies potentielle et cinétique. On suppose enfin que l'installation fonctionne de manière stationnaire.

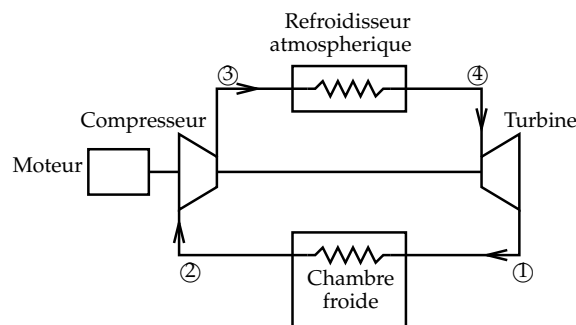


FIGURE 3 – Schématisation de l'installation.

Les données thermodynamiques du gaz considéré sont les suivantes :

C_p	1,04 kJ/(kg.K)
γ	1,4
r	0.297 kJ/(kg.K)

Les données connues sont les suivantes :

$P_1 = 1 \text{ bar}$	
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 3 \text{ bar}$	
$P_4 = 3 \text{ bar}$	$T_4 = 305 \text{ K}$

On cherche à déterminer la puissance \dot{W}_m à apporter à la turbine par l'intermédiaire d'un moteur auxiliaire (cf. schéma) ainsi que l'efficacité thermodynamique de ce cycle.

2.1 Représentation du cycle sur un diagramme de Mollier

Tracer l'allure du trajet thermodynamique de l'évolution du gaz dans l'installation dans un diagramme $(h;s)$. Préciser le sens du cycle.

Correction

Le cycle est représenté sur la figure ci-dessous. On note en particulier que les compression et détente n'étant pas réversibles, l'entropie entre les états ② et ③, d'une part, et ④ et ①, d'autre part, est croissante (elle serait constante si les transformations étaient réversibles). Entre les états ① et ②, le gaz se réchauffe de manière à extraire la chaleur de la chambre froide. Le sens du cycle est représenté sur cette figure.

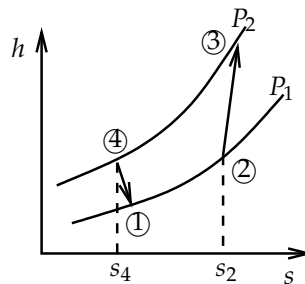


FIGURE 4 – Représentation du cycle thermodynamique dans le diagramme $(h;s)$.

2.2 Détermination de tous les états du fluide au cours du cycle

Déterminer les températures T_1 et T_3 .

Correction

On suppose tout d'abord que la compression est adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On note T_3^{is} la température correspondant à cette compression isentropique. Le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait et γ étant supposé être constant, on a

$$\left(\frac{T_2}{T_3^{is}}\right)^\gamma = \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\gamma-1}$$

soit

$$T_3^{is} = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On trouve :

$$T_3^{is} = 362.72 \text{ K}$$

Par définition du rendement isentropique d'un compresseur, on a :

$$\eta_c^{is} = \frac{h_3^{is} - h_2}{h_3 - h_2}$$

Or, le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à C_p constant, on a

$$h - h_0 = C_p (T - T_0)$$

où $h_0 = h(T_0)$ et où T_0 est une température de référence. Par conséquent

$$\eta_c^{is} = \frac{T_3^{is} - T_2}{T_3 - T_2}$$

soit

$$T_3 = T_2 + \frac{T_3^{is} - T_2}{\eta_c^{is}}$$

L'application numérique donne

$$T_3 = 366,79 \text{ K}$$

En appliquant la même démarche à la turbine, on a :

$$\left(\frac{T_1^{is}}{T_4} \right)^\gamma = \left(\frac{P_1}{P_4} \right)^{\gamma-1}$$

soit

$$T_1^{is} = T_4 \left(\frac{P_1}{P_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On trouve :

$$T_1^{is} = 222.83 \text{ K}$$

Le rendement isentropique de la turbine est

$$\eta_d^{is} = \frac{T_4 - T_1}{T_4 - T_1^{is}}$$

soit

$$T_1 = T_4 + \eta_d^{is} (T_1^{is} - T_4)$$

L'application numérique donne

$$T_1 = 226,12 \text{ K}$$

En résumé, on a :

$P_1 = 1 \text{ bar}$	$T_1 = 226.12 \text{ K}$
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 3 \text{ bar}$	$T_3 = 366.79 \text{ K}$
$P_4 = 3 \text{ bar}$	$T_4 = 305 \text{ K}$

2.3 Détermination des énergies échangées à chaque composant du circuit

Déterminer les énergies calorifiques massiques fournies au fluide aux échangeurs et les énergies mécaniques massiques fournies au fluide au compresseur et à la turbine.

En déduire l'énergie massique devant être fournie par le moteur au compresseur.

Correction

Pour toutes ces déterminations, on applique le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert. L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies potentielle et cinétique étant négligeables, on a

$$\dot{m}(h_s - h_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

où h_s et h_e sont les enthalpies massiques respectivement en sortie et en entrée du composant considéré. Du fait des hypothèses sur le comportement thermodynamique du fluide, on a

$$\frac{\dot{W}' + \dot{Q}}{\dot{m}} = C_p (T_s - T_e)$$

Pour le compresseur et la turbine, $\dot{Q} = 0$ et pour les échangeurs, $\dot{W}' = 0$.

Au compresseur, on a

$$\frac{\dot{W}'_c}{\dot{m}} = C_p (T_3 - T_2)$$

On obtient

$$\frac{\dot{W}'_c}{\dot{m}} = 105.78 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est positif car le fluide reçoit de l'énergie au compresseur.

A la turbine, on a

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = C_p (T_1 - T_4)$$

On obtient

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = -81.98 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est négatif car le fluide cède de l'énergie à la turbine.

On remarque que le travail fourni par le fluide à la turbine n'est pas suffisant pour que la turbine puisse fournir tout le travail nécessaire au compresseur pour augmenter la pression du fluide. C'est pourquoi un moteur auxiliaire est nécessaire au compresseur.

A l'échangeur avec la chambre froide, on a

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{m}} = C_p (T_2 - T_1)$$

On obtient

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{m}} = 40.41 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est positif car le fluide reçoit de l'énergie cédée par la chambre froide.

A l'échangeur atmosphérique, on a

$$\frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = C_p (T_4 - T_3)$$

On obtient

$$\frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = -64.21 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est négatif car le fluide cède de la chaleur à l'extérieur.

Pour déterminer l'énergie massique fournie par le moteur auxiliaire au compresseur, on doit décomposer la puissance massique fournie au fluide par le compresseur : cette puissance est la somme de la puissance transmise par la turbine et de la puissance fournie par la moteur. On a donc :

$$\dot{W}'_c = -\dot{W}'_t + \dot{W}_m$$

La puissance fournie par la turbine au compresseur est bien l'opposée de la puissance fournie par la turbine au fluide.

On obtient :

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{m}} = 23.81 \text{ kJ/kg}$$

Ce résultat peut également se trouver en faisant un bilan d'énergie sur le cycle complet :

$$\frac{\dot{W}_m + \dot{Q}_f + \dot{Q}_c}{\dot{m}} = 0$$

On trouve

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{m}} = 23.81 \text{ kJ/kg}$$

On trouve donc bien le même résultat.

Les différentes énergies massiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	\dot{Q}/\dot{m} (kJ/kg)	\dot{W}/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur	0	105.78
Refroidisseur atmosphérique	-64.21	0
Turbine	0	-81.98
Echangeur	40.41	0
Moteur	0	23.81

2.4 Dissipations exergetiques

On suppose que les échanges thermiques au refroidisseur atmosphérique et à l'échangeur avec la chambre froide se font à une température d'échange respectivement de 300 K et de 260 K. On considère que le milieu ambiant est à pression atmosphérique et à une température de 280 K.

Déterminer les dissipations exergetiques à chaque composant du circuit.

Correction

On commence par déterminer une forme générale de la dissipation d'exergie \dot{D}_a . Considérons comme système le fluide circulant dans un composant quelconque du circuit. L'expression générale du bilan d'exergie pour ce système est le suivant :

$$\frac{d(\mathcal{U} - T_a \mathcal{S} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = \sum_{e-s} \dot{m} (h - T_a s + e_c + e_p) + \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) + \dot{W}' - \dot{D}_a$$

Par ailleurs, l'expression générale du bilan d'énergie est le suivant :

$$\frac{d(\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies cinétique et potentielle étant supposées négligeables, ces expressions deviennent :

$$\sum_{e-s} \dot{m} (h - T_a s) + \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) + \dot{W}' - \dot{D}_a = 0$$

$$\sum_{e-s} \dot{m} h + \dot{Q} + \dot{W}' = 0$$

En combinant ces deux équations, on arrive à l'expression suivante de la dissipation d'exergie :

$$\dot{D}_a = T_a \left(- \sum_{e-s} \dot{m} s - \frac{\dot{Q}}{T_{ech}} \right)$$

On peut remarquer que cette expression peut se retrouver facilement à partir de l'expression du bilan d'entropie et du lien entre les dissipations d'entropie et d'exergie.

Par ailleurs, chaque composant étant traversé par un seul fluide et l'écoulement étant stationnaire, \dot{m} est constant et on a donc

$$\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = T_a \left(- \sum_{e-s} s - \frac{\dot{Q}/\dot{m}}{T_{ech}} \right)$$

Cette expression montre qu'il est nécessaire de calculer la variation d'entropie. Le fluide étant supposé avoir le comportement d'un gaz parfait à C_p constant, on a :

$$s_j - s_i = C_p \ln \left(\frac{T_j}{T_i} \right) - r \ln \left(\frac{P_j}{P_i} \right)$$

On applique ces relations à chaque composant.

Compresseur

$$\frac{\dot{D}_{ac}}{\dot{m}} = T_a (s_3 - s_2)$$

Refroidisseur atmosphérique

$$\frac{\dot{D}_{ach}}{\dot{m}} = T_a \left((s_4 - s_3) - \frac{\dot{Q}_c/\dot{m}}{(T_{ech})_{ch}} \right)$$

Turbine

$$\frac{\dot{D}_{at}}{\dot{m}} = T_a (s_1 - s_4)$$

Echangeur chambre froide

$$\frac{\dot{D}_{afr}}{\dot{m}} = T_a \left((s_2 - s_1) - \frac{\dot{Q}_f/\dot{m}}{(T_{ech})_{fr}} \right)$$

Les calculs numériques donnent les valeurs données dans le tableau suivant :

	$\dot{D}_a / \dot{m} \text{ (kJ/kg)}$
Compresseur	3.25
Refroidisseur atmosphérique	6.25
Turbine	4.26
Echangeur	2.66

On remarque avant tout que toutes les valeurs de \dot{D}_a sont positives, ce qui est cohérent avec le second principe de la thermodynamique.

Ce tableau montre que l'essentiel de la dissipation d'exergie a lieu au refroidisseur atmosphérique alors que l'échangeur de la chambre froide est le composant qui dissipe le moins d'exergie. On note enfin que le rendement isentropique de 96% du compresseur et de la turbine est responsable d'une part non négligeable de la dissipation d'exergie totale.

D'un point de vue physique, les sources de dissipation ne sont pas les mêmes aux échangeurs (refroidisseur atmosphérique et échangeur) et dans les machines tournantes (compresseur et turbine). Dans les machines tournantes, l'essentiel de la dissipation est dû à des irréversibilités internes au fluide telles que le frottement du fluide (effets visqueux qui représentent le frottement entre les filets fluides). Dans les échangeurs, l'essentiel de la dissipation est dû aux différences de température entre le fluide externe et le gaz du cycle : du fait de cette différence de température, même si chaleur perdue par le fluide chaud est égale à la chaleur reçue par le fluide froid (par application du bilan d'énergie), l'entropie cédée n'est pas égale à l'entropie reçue. Le transfert de chaleur se faisant pour une valeur finie de l'écart de température entre les fluides chaud et froid, le transfert thermique (par conduction à travers la paroi solide séparant les deux fluides) induit une dissipation d'entropie (par conduction).

2.5 Rendement exergetique de l'installation

Définir et déterminer le rendement exergetique de l'installation.

Correction

Le rendement exergetique d'une installation est le rapport entre les puissances exergetiques « utiles » et les puissances exergetiques « dépensées ». Dans le cas de cette installation, on est intéressé par la puissance exergetique de l'échangeur avec la chambre froide et on doit dépenser la puissance fournie au compresseur.

On peut donc définir le rendement exergetique de l'installation de la manière suivante :

$$\eta_{ex} = \frac{|(\dot{Q}_f / \dot{m})(1 - T_a / T_{ech})|}{|\dot{W}_m / \dot{m}|}$$

On trouve

$$\eta_{ex} = 13\%$$

2.6 Débit de masse

On suppose que, en fonctionnement stationnaire, la chambre froide a une « perte » thermique moyenne de 100 kW.

En déduire le débit de masse de gaz dans le circuit ainsi que la puissance du moteur couplé au compresseur.

Correction

On fait un bilan d'énergie sur l'ensemble des constituants de la chambre froide (air, denrées, etc.). On note \mathcal{U} l'énergie interne de ce système et \dot{Q}_p la puissance des « pertes » thermiques de la chambre froide ($\dot{Q}_p > 0$ car la chambre froide a tendance à se réchauffer et reçoit donc de la chaleur de l'extérieur). Le système considéré est fermé et il n'y a pas de variation d'énergies cinétique et potentielle ; le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \dot{Q}_p - \dot{Q}_f$$

La puissance thermique fournie au gaz du circuit de refroidissement \dot{Q}_f est extraite de la chambre froide et la puissance correspondante fournie (algébriquement) à la chambre froide est donc $(-\dot{Q}_f)$.

En stationnaire, on a donc

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_p = 100 \text{ kW}$$

On a donc

$$\dot{m} = \dot{Q}_p \frac{\dot{m}}{\dot{Q}_f} = \frac{100}{40.41} = 2.47 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donc

$$\dot{W}_m = 2.47 \times 23.81 = 58.92 \text{ kW}$$

3 Questions complémentaires

3.1 Utilisation de l'énergie cédée à l'échangeur atmosphérique

Dans le cycle considérée, l'énergie thermique cédée par le gaz à l'échangeur atmosphérique est « perdue ». Cette énergie pourrait être utilisée pour fournir du travail au compresseur.

Déterminer l'énergie mécanique massique maximale pouvant être récupérée à l'échangeur atmosphérique.

Si l'intégralité de cette énergie est récupérée pour être transmise au compresseur, déterminer le nouveau rendement exergetique de l'installation.

Correction

Aucune machine ne peut être plus efficace qu'une machine de Carnot. On suppose donc que la chaleur cédée par le gaz à l'échangeur atmosphérique est couplée à une machine de Carnot : le gaz constitue la source chaude tandis que l'air ambiant en constitue la source froide (on a en effet $(T_{ech})_{ch} > T_a$).

Or, si une quantité d'énergie thermique Q est fournie à la machine de Carnot réversible par la source chaude, le travail fourni est $(1 - T_a / (T_{ech})_{ch}) Q$ et l'énergie thermique transmise à la source froide est $(T_a / T_{ech}) Q$.

Appliqué à l'installation considérée, on a :

$$\frac{\dot{W}_{ech}^{max}}{\dot{m}} = \left(1 - \frac{T_a}{(T_{ech})_{ch}}\right) \frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = -4.28 \text{ kJ/kg}$$

Ici, le signe est bien négatif si l'on se place du point de vue de la machine de Carnot qui fournit du travail à l'extérieur.

Cette valeur est à comparer aux 23.81 kJ/kg de l'énergie nécessaire au moteur, ce qui représente prêt de 20% de la puissance du moteur.

Si on suppose que toute cette énergie peut effectivement être récupérée et transmise au compresseur, la puissance du moteur se trouve diminuée d'autant et on trouve une nouvelle énergie massique de 19.53 kJ/kg. On trouve alors un nouveau rendement exergetique de 16%.

3.2 Utilisation de plusieurs étages de compression

3.2.1 Compression isotherme

Par un bilan d'énergie, montrer qu'une compression isotherme est « gratuite » en énergie.

Correction

Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\dot{m} (h_s - h_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

dans le cas où l'on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique et où l'on suppose que l'écoulement est stationnaire. Si le gaz est modélisé comme un gaz parfait à C_p constant, on a :

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

Par conséquent, si $T_s = T_e$, la compression est énergétiquement « gratuite » : l'énergie fournie sous forme de travail est transformée en chaleur.

3.2.2 Etude d'un étage de compression

Il est technologiquement difficile de faire une compression isotherme. C'est pourquoi on essaie de s'approcher d'une telle transformation en effectuant des compressions par étages : on comprime le fluide dans un compresseur adiabatique puis on fait passer le fluide dans un refroidisseur intermédiaire pour le ramener à sa température initiale. Cette double transformation constitue un étage. On multiplie les étages pour arriver à la pression finale désirée. La question qui se pose est de savoir comment optimiser le système en déterminant les pressions intermédiaires de chaque étage de compression.

En supposant la compression adiabatique réversible (et le gaz parfait à C_p constant), déterminer la dissipation d'exergie d'un étage en fonction du rapport des pressions et de la température d'entrée.

Correction

Au compresseur, on a

$$\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}'$$

D'où :

$$\frac{\dot{W}'}{\dot{m}} = C_p T_e \left(\left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = -\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

Avec les hypothèses du problème, le bilan d'exergie sur l'étage s'écrit :

$$\dot{m} (ex_s - ex_e) = \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) + \dot{W}' - \dot{D}_a$$

Or, $T_s = T_e$ et

$$s_s - s_e = -r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right)$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + C_p T_e \left[\left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}}$$

3.2.3 Optimisation d'une compression à deux étages

On considère une compression à deux étages. Les pressions d'entrée et de sortie P_e et P_s sont supposées fixées et on note P_2 la pression intermédiaire (sortie du premier étage et entrée du second). On cherche à déterminer la pression P_2 qui optimise le système.

Déterminer la dissipation d'exergie totale de la compression à deux étages et en déduire la valeur du facteur de compression optimal du premier étage (P_2/P_e).

Correction

Les dissipations des deux étages s'additionnent et on a donc (en supposant que la température d'échange est la même pour les échangeurs des deux étages) :

$$\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = -T_a r \left[\ln \left(\frac{P_2}{P_e} \right) + \ln \left(\frac{P_s}{P_2} \right) \right] + Cp T_e \left[\left(\frac{P_2}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_s}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

soit

$$\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + Cp T_e \left[\left(\frac{P_2}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_s}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

Le système est optimal lorsque la dissipation d'exergie est minimale. Ici, la seule variable du système est P_2 et à cet optimum, on a donc $(\partial \dot{D}_a / \partial P_2) = 0$. D'après l'expression ci-dessus, on montre que cette condition s'écrit :

$$P_2 = \sqrt{P_e P_s}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{P_2}{P_e} = \frac{P_s}{P_2}}$$

Cela signifie que les deux étages de la compression ont le même rapport de compression.

3.2.4 Généralisation à un nombre N d'étages

En suivant le même raisonnement mais pour un nombre N quelconque d'étages de compression, déterminer les facteurs de compression optimaux des étages de compression.

Correction

On note (P_2, \dots, P_N) les pressions intermédiaires. Pour simplifier l'écriture on note $P_1 = P_e$ et $P_{N+1} = P_s$, sachant que ces deux pressions sont fixées.

La dissipation totale s'écrit :

$$\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + Cp T_e \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{P_{i+1}}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - N \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

C'est une fonction de (P_2, \dots, P_N) . A son minimum, on a donc $(\partial \dot{D}_a / \partial P_i) = 0, \forall i \in \{2, \dots, N\}$. Cette condition amène à la condition suivante :

$$\boxed{\forall i \in \{2, \dots, N\}, \frac{P_i}{P_{i-1}} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \sqrt[N]{\frac{P_s}{P_e}}}$$

ce qui signifie que tous les étages ont le même facteur de compression.

3.2.5 Application au cycle de réfrigération

Comment appliquer ce résultat au cas du cycle de réfrigération étudié ?

Ce cycle complet peut être étudié en guise d'exercice complémentaire (en imposant que les états du fluide en entrée et sortie de l'échangeur avec la chambre froide sont les mêmes que dans le cas du cycle étudié).

Correction

Ce résultat peut être appliqué en remplaçant la compression par deux compressions successives avec un refroidissement intermédiaire.

Le circuit correspondant est schématisé sur la figure ci-dessous.

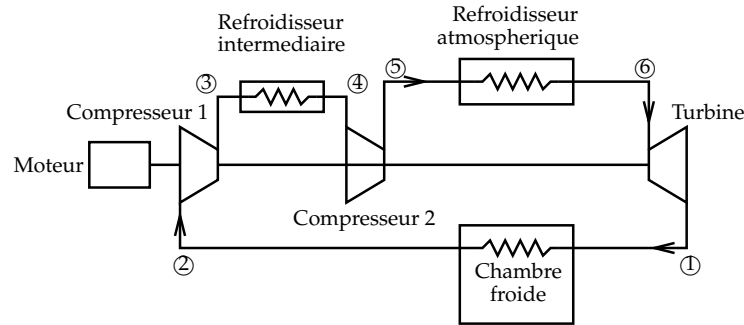


FIGURE 5 – Schématisation de l'installation comprenant deux compresseurs avec refroidissement intermédiaire.

On suppose que les deux compresseurs ont les mêmes caractéristiques et notamment un rapport de compression de 2. Par ailleurs, on suppose que les températures du fluide à l'entrée des deux compresseurs sont les mêmes. On impose enfin que la température du fluide en entrée de la turbine est la même que précédemment.

L'installation doit fournir le même service, à savoir retirer une quantité de chaleur donnée à la chambre froide.

Le cycle correspondant à cette installation est schémétisé ci-dessous.

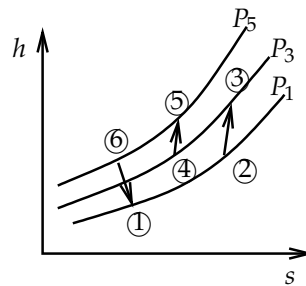


FIGURE 6 – Représentation du nouveau cycle thermodynamique dans le diagramme $(h; s)$.

Les états connus du fluide sont donnés dans le tableau ci-dessous.

$P_1 = 1 \text{ bar}$	
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 1.73 \text{ bar}$	
$P_4 = 1.73 \text{ bar}$	$T_4 = 265 \text{ K}$
$P_5 = 3 \text{ bar}$	
$P_6 = 3 \text{ bar}$	$T_6 = 305 \text{ K}$

Pour les deux compresseurs, si l'on note par les indices e et s les états d'entrée et de sortie respectivement, on a

$$\left(\frac{T_s^{is}}{T_e} \right)^\gamma = \left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\gamma-1}$$

et

$$\eta_c^{is} = \frac{T_s^{is} - T_e}{T_s - T_e}$$

Les deux compresseurs ayant le même taux de compression (P_s/P_e) et le même rendement isentropique et la température à l'entrée des deux compresseurs étant la même, les températures en sortie des deux compresseurs sont les mêmes. On trouve :

$$T_3 = T_5 = 311.91 \text{ K}$$

De même, à la turbine, on a

$$\left(\frac{T_s^{is}}{T_e}\right)^\gamma = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\gamma-1}$$

et

$$\eta_t^{is} = \frac{T_s - T_e}{T_s^{is} - T_e}$$

On trouve

$$T_1 = 226.12 \text{ K}$$

Pour chaque compresseur, l'application du premier principe de la thermodynamique s'écrit (avec l'ensemble des hypothèses faites) :

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}'_c$$

On en déduit :

$$\frac{\dot{W}'_{c1}}{\dot{m}} = \frac{\dot{W}'_{c2}}{\dot{m}} = 48.75 \text{ kJ/kg}$$

Les états du fluide en entrée et en sortie de la turbine étant les mêmes que dans le cycle précédent, le travail massique fourni au fluide est également le même :

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = -81.98 \text{ kJ/kg}$$

Or

$$\dot{W}'_t = \dot{W}_m - \dot{W}'_c = \dot{W}'_m - \dot{W}'_{c1} - \dot{W}'_{c2}$$

On trouve alors facilement :

$$\frac{\dot{W}'_m}{\dot{m}} = 15.52 \text{ kJ/kg}$$

Les différentes énergies massiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	$\dot{Q}/\dot{m} \text{ (kJ/kg)}$	$\dot{W}/\dot{m} \text{ (kJ/kg)}$
Compresseur 1	0	48.75
Refroidisseur intermédiaire	-48.75	0
Compresseur 2	0	48.75
Refroidisseur atmosphérique	-7.18	0
Turbine	0	-81.98
Echangeur	40.41	0
Moteur	0	15.52

La puissance thermique échangée avec la chambre froide est la même que dans le premier cycle étudié. Le bilan d'énergie de la chambre froide est donc identique et le débit de masse également :

$$\dot{m} = 2.47 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donc

$$\dot{W}_m = 38.41 \text{ kW}$$

Cette puissance est inférieure à celle du premier cycle étudié, ce qui montre l'intérêt d'utiliser plusieurs étages de compression avec refroidissement intermédiaire.

Pour ce qui est des dissipations d'exergie, les calculs numériques donnent les valeurs données dans le tableau suivant :

	$\dot{D}_a / \dot{m} \text{ (kJ/kg)}$
Compresseur 1	1.76
Refroidisseur intermédiaire	5.07
Compresseur 2	1.76
Refroidisseur atmosphérique	0.18
Turbine	4.26
Echangeur	2.66

On remarque que la dissipation d'exergie au refroidisseur atmosphérique est fortement diminuée, ce qui est dû au fait que la quantité d'énergie échangée a fortement diminuée.

Le rendement exergetique garde la même définition mais sa valeur est augmentée du fait de la baisse de la puissance électrique nécessaire. On trouve en effet $\eta_{ex} = 20\%$.

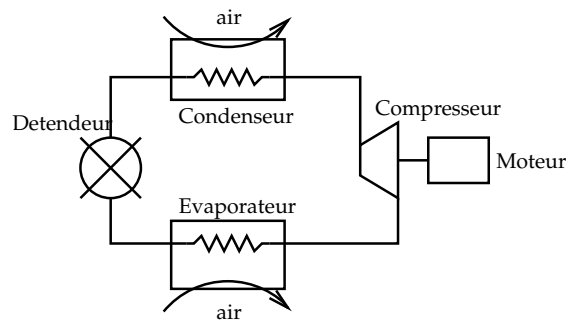
PC N°4

Dimensionnement d'une pompe à chaleur

Corrigé

L'objectif est d'étudier une pompe à chaleur. Cette pompe à chaleur fonctionne sur la base d'un cycle de Rankine avec comme fluide caloporteur le R142b dont certaines propriétés thermodynamiques sont données en annexe.

Le circuit fluide et ses différents composants sont schématisés sur la figure ci-dessous.



L'objectif de cette pompe à chaleur est de chauffer l'air d'un bâtiment.

1 Description du cycle

Indiquer le sens de circulation du fluide et décrire le cycle.

Correction

L'objectif général d'une pompe à chaleur est de fournir de l'énergie à une source chaude (typiquement l'intérieur d'un bâtiment) en la prélevant à une source froide (typiquement l'extérieur de ce bâtiment). D'après le second principe de la thermodynamique, un tel transfert ne peut pas s'effectuer de manière spontanée, raison pour laquelle il est nécessaire de fournir un travail extérieur, matérialisé ici par le travail fourni par le moteur.

Pour déterminer le sens de circulation du fluide, il convient en premier lieu de déterminer à quels niveaux du circuit se situent le bâtiment et l'extérieur.

Puisque le cycle considéré ici est basé sur un cycle de Rankine, le fluide circulant est au moins en partie diphasique au sein des deux échangeurs (condenseur et évaporateur). Or, la chaleur du fluide caloporteur cède son énergie à l'extérieur du circuit lorsqu'il se condense. Cette énergie cédée par le fluide caloporteur est transmise au bâtiment que l'on cherche à chauffer. De manière similaire, l'extérieur est en contact avec l'évaporateur.

Il convient à présent de déterminer les niveaux de pression du fluide dans les deux échangeurs. Pour cela, on commence par raisonner sur les températures. On note T_b et T_e les températures du

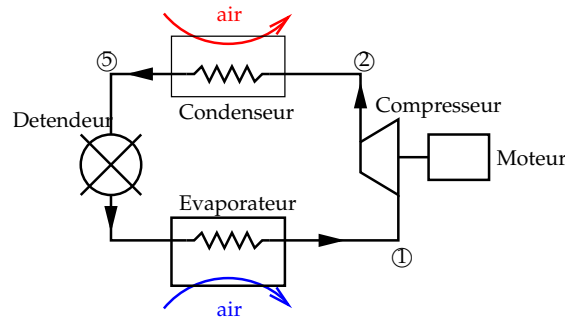
bâtiment et de l'extérieur respectivement, sachant que $T_b > T_e$. Pour que l'échange entre le fluide caloporteur et l'air du bâtiment puisse se produire de manière spontanée, il est nécessaire que la température du fluide caloporteur dans le condenseur T_{cond} soit supérieure à la température du bâtiment : $T_{cond} > T_b$. Or, la température T_{cond} est approximativement égale à la température de saturation du fluide caloporteur : $T_{cond} \simeq T^{sat}(P_{cond})$. De la même manière, pour que l'échange entre l'air extérieur et le fluide caloporteur puisse se produire de manière spontanée au niveau de l'évaporateur, il est nécessaire que la température du fluide caloporteur au sein de l'évaporateur T_{evap} soit inférieure à la température extérieure : $T_{evap} < T_e$. Or, la température T_{evap} est approximativement égale à la température de saturation du fluide caloporteur : $T_{evap} \simeq T^{sat}(P_{evap})$. Finalement, on a les inégalités suivantes :

$$T^{sat}(P_{cond}) > T_b > T_e > T^{sat}(P_{evap})$$

La température de saturation étant une fonction croissante de la pression, on a donc

$$P_{cond} > P_{evap}$$

La pression dans le condenseur est donc supérieure à la pression dans l'évaporateur, ce qui signifie que le compresseur augmente la pression du fluide à la sortie de l'évaporateur. Le sens de circulation du fluide dans le circuit est donc celui indiqué sur la figure ci-dessous.

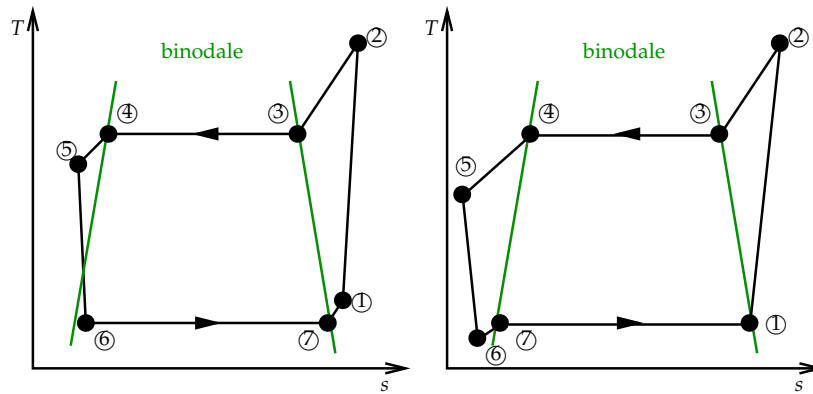


Ainsi, le fluide est sous forme monophasique vapeur (ou en tout cas très riche en vapeur) à l'entrée du compresseur et est comprimé par celui-ci, ce qui induit une hausse de la température du fluide (en plus d'une hausse de sa pression). Le fluide est refroidi au condenseur où il cède une partie de son énergie à l'air du bâtiment ; ce refroidissement se fait à pression constante et le fluide à la sortie du condenseur est généralement à l'état liquide légèrement sous-refroidi. La pression du fluide s'abaisse à la traversée du détendeur, ce qui s'accompagne d'une baisse de la température ; le fluide est généralement sous forme diphasique (riche en liquide) à la sortie du détendeur. Le fluide est alors transformé en vapeur (légèrement surchauffée) à l'évaporateur ; cette transformation est isobare.

Indiquer l'allure du cycle dans un diagramme $(T;s)$ en y indiquant les états caractéristiques du fluide.

Correction

L'allure générale du cycle est donnée sur les figures ci-dessous. Avec les données fournies à ce stade, on ne sait pas encore si les états en entrée et sortie du compresseur et en entrée et sortie du détendeur sont diphasiques ou monophasiques. Plusieurs cycles sont possibles tels que représentés sur les figures ci-dessous.



2 Etats du fluide au cours du cycle

La vapeur à l'entrée du compresseur est à une pression de 1.5 bar et à une température de 0°C, le fluide sort du condenseur à une température de 35°C et la vaporisation a lieu à une pression de 1.5 bar. La pression à la sortie du compresseur est de 5.2 bar et le compresseur a un rendement isentropique de 84.8%.

Déterminer les états du fluide aux différents points caractéristiques du cycle.

Correction

Etat ① en entrée du compresseur

Les données thermodynamiques permettent de déterminer que le fluide à l'entrée du compresseur est sous forme de vapeur surchauffée : sa température (0°C) est supérieure à sa température de saturation à 1.5 bar (−10°C).

Par ailleurs, les données thermodynamiques permettent de déterminer les propriétés de la vapeur dans l'état ① :

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	0	417.80	1.820

Etat ② en sortie du compresseur

On suppose dans un premier temps que la compression est réversible ; étant adiabatique, elle est donc isentropique. La vapeur se trouve alors à une pression de 5.2 bar et son entropie est égale à 1.820 kJ/(kg.K). Les données thermodynamiques ne donnent pas les caractéristiques du fluide pour cet état. On effectue alors une interpolation linéaire entre les états voisins :

$$h_2^{is} \simeq 450.84 + \frac{544.62 - 450.84}{1.825 - 1.811} \times (1.820 - 1.811) = 453.91 \text{ kJ/kg}$$

P (bar)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	450.84	1.811
5.2	453.91	1.820
5.2	455.62	1.825

Le rendement isentropique du compresseur est de 84.8%. On a donc :

$$\eta_C = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1}$$

soit

$$h_2 = h_1 + \frac{h_2^{is} - h_1}{\eta_C}$$

$$h_2 = 417.80 + \frac{543.91 - 417.80}{0.848} = 460.4 \text{ kJ/kg}$$

Les données thermodynamiques permettent alors de déterminer les propriétés de la vapeur dans l'état ②.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	60	460.40	1.840

Etat ⑤ en sortie de condenseur

La condensation se fait à pression constante de 5.2 bar. A cette pression, les données thermodynamiques indiquent que la température de saturation est de 40°C. Or, en sortie de condenseur, la température (35°C) est inférieure à la température de saturation, ce qui signifie que le fluide est du liquide sous-refroidi. A 5.2 bar et 35°C, les données thermodynamiques permettent de déterminer h_5 et s_5 .

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	35	245.57	1.150

Etat en sortie de détenteur

Par application du bilan d'énergie sur le fluide dans le détenteur, on a

$$h_6 = h_5 = 245.57 \text{ kJ/kg}$$

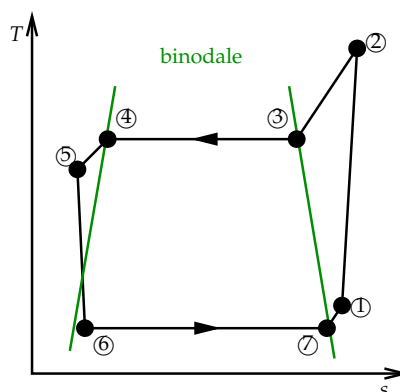
On sait par ailleurs que la pression en sortie du détenteur est de 1.5 bar. Les données thermodynamiques montrent que, pour cette pression, l'enthalpie du fluide (245.57 kJ/kg) est supérieure à l'enthalpie du liquide à saturation (187.19 kJ/kg). Cela signifie donc que le fluide en sortie du détenteur est diphasique. Le titre de vapeur x_v est donné par

$$x_v = \frac{h - h_l^{sat}}{h_v^{sat} - h_l^{sat}} = \frac{245.57 - 187.19}{409.76 - 187.19} = 26,23\%$$

L'entropie du système diphasique est alors donnée par

$$s_6 = s_l^{sat} + x_v (s_v^{sat} - s_l^{sat}) = 0.952 + 0.2623 \times (1.798 - 0.952) = 1.174 \text{ kJ/(kg.K)}$$

A ce stade de l'analyse, on a déterminé que l'allure du cycle est celui de la figure ci-dessous.



Il ne reste alors plus qu'à déterminer les caractéristiques des états du fluide à saturation.

Etat ⑦

Cet état correspond à la vapeur à saturation à 1.5 bar dont on peut trouver les caractéristiques thermodynamiques dans la table.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	-10	409.76	1.798

Etats ③ et ④

Ce sont les états à saturation respectivement vapeur et liquide du fluide à 5.2 bar dont on peut connaître les caractéristiques grâce aux données thermodynamiques.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	40	252.14	1.177
5.2	40	441.27	1.781

Récapitulatif

Les caractéristiques du fluide dans les états des points caractéristiques du cycle sont récapitulées dans le tableau suivant. Les données en **vert** sont celles fournies, celles en **bleu** ont été déterminées à partir des tables thermodynamiques et celles en **mauve** ont été déterminées par calcul.

Etat	P	T	h	s	x_v
①	1.5	273.15	417.8	1.820	
②	5.2	333.15	460.4	1.840	
③	5.2	313.15	441.27	1.781	
④	5.2	313.15	252.14	1.177	
⑤	5.2	308.15	245.57	1.150	
⑥	1.5	263.15	245.57	1.174	0.2623
⑦	1.5	263.15	409.76	1.798	

3 Transferts énergétiques

Déterminer les transferts énergétiques aux différents composants du système.

Correction

Le bilan d'énergie s'écrit

$$\frac{\partial (\mathcal{U} + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c)}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_p + e_c) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies cinétique et potentielle pouvant être négligées, ce bilan devient :

$$\dot{m} [h]_e^s = \dot{Q} + \dot{W}'$$

Détendeur

Il n'y a aucun transfert d'énergie dans le détendeur.

Evaporateur

Aucun travail n'est fourni au fluide et on a

$$\frac{\dot{Q}_{evap}}{\dot{m}} = h_1 - h_6 = 172.23 \text{ kJ/kg}$$

Compresseur

Aucun échange de chaleur n'a lieu au compresseur et on a

$$\frac{\dot{W}'_{comp}}{\dot{m}} = h_2 - h_1 = 42.6 \text{ kJ/kg}$$

Condenseur

Aucun travail n'est fourni au fluide et on a

$$\frac{\dot{Q}_{cond}}{\dot{m}} = h_5 - h_2 = -214.83 \text{ kJ/kg}$$

Récapitulatif

Les caractéristiques des composants de la machine étudiée sont données dans le tableau suivant.

Composant	\dot{Q}/\dot{m} (kJ/kg)	\dot{W}'/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur	0	42.6
Condenseur	-214.83	0
Détendeur	0	0
Evaporateur	172.23	0

On vérifie que la somme des énergies transférées est bien nulle.

Définir et déterminer le coefficient de performance de l'installation.

Correction

On définit le coefficient de performance par

$$\omega = \frac{-\dot{Q}_{cond}}{\dot{W}'_{comp}} = \frac{214.83}{42.6} = 5.04$$

On remarque que ce coefficient de performance est effectivement plus faible que celui d'une machine de Carnot réversible fonctionnant entre deux sources à température de 3.5°C et 26.4°C (cf. données fournies pour l'analyse exergétique) :

$$\omega_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 13.08$$

On verra dans l'analyse exergétique qu'il peut être plus judicieux de définir une autre machine de Carnot.

On suppose que la puissance échangée au condenseur est de 31.18 kW.

Déterminer le débit de masse de fluide frigorigène et en déduire la puissance du moteur.
Analyser l'intérêt d'une pompe à chaleur.

Correction

On a

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{cond}}{\dot{Q}_{cond}/\dot{m}} = \frac{31.18}{214.83} = 0.145 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donnée par

$$\dot{W}' = 0.145 \times 42.6 = 6.2 \text{ kW}$$

Cette analyse montre que pour fournir 31.18 kW sous forme de chaleur, il est nécessaire de fournir seulement 6.2 kW sous forme de travail, par exemple électrique. Cela signifie que l'on dépense 5

fois moins d'énergie qu'on en reçoit (d'où la valeur du coefficient de performance). Le complément énergétique est apporté par l'énergie thermique transférée de la source froide à la source chaude. Mais, d'après le second principe, ce transfert ne pouvant pas se faire de manière spontanée, il est nécessaire de fournir du travail pour que ce transfert puisse se faire. Mais il n'empêche que l'essentiel du transfert thermique se fait par transfert de chaleur entre la source froide et la source chaude.

Si l'on devait utiliser un système électrique direct pour apporter l'énergie nécessaire, il faudrait transférer 31.18 kW directement par effet Joule. Cela signifie qu'un système de ce type permet de faire des économies d'énergie substantielles (mais au prix d'un investissement plus important).

4 Analyse exergétique

On suppose que les échanges thermiques au condenseur et à l'évaporateur se font à une température d'échange respectivement de 26.4°C et 3.5°C. On considère enfin que les conditions ambiantes sont 1 bar et 18°C.

Déterminer les variations d'exergie massique à la traversée de chaque composant et les créations d'exergie et d'entropie par unité de masse à chaque composant du circuit.

Commenter, en particulier la variation d'exergie à la traversée de l'évaporateur.

Correction

L'exergie massique est définie par

$$ex = h + e_c + e_p - T_a s$$

où T_a est la température du milieu ambiant.

En négligeant les variations d'énergies cinétique et potentielle, la variation d'exergie massique est

$$[ex]_e^s = [h]_e^s - T_a [s]_e^s$$

La création d'exergie est donnée par (pour un écoulement stationnaire qui est tel que $\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m}$)

$$\frac{\dot{D}_a}{\dot{m}} = T_a \left(- \sum_{e \rightarrow s} s - \frac{\dot{Q}}{T_{ech}} \right)$$

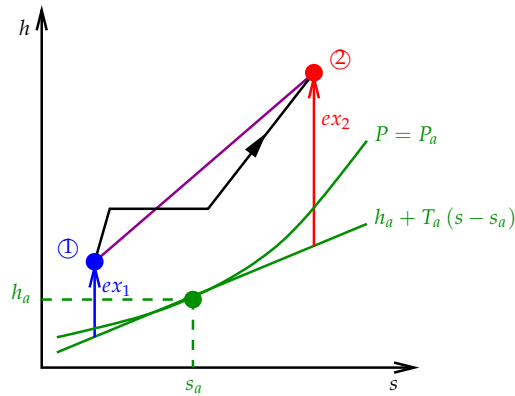
Appliquée aux différents composants, on obtient les valeurs données dans le tableau suivant.

Composant	$[ex]_e^s$ (kJ/kg)	\dot{D}_a / \dot{m} (kJ/kg)	$\dot{\sigma} / \dot{m}$ (kJ/(kg.K))
Compresseur	36.76	5.82	0.0200
Condenseur	-13.92	7.90	0.0271
Détendeur	-6.99	6.99	0.0240
Evaporateur	-15.85	6.83	0.0234
Total	0	27.54	0.0946

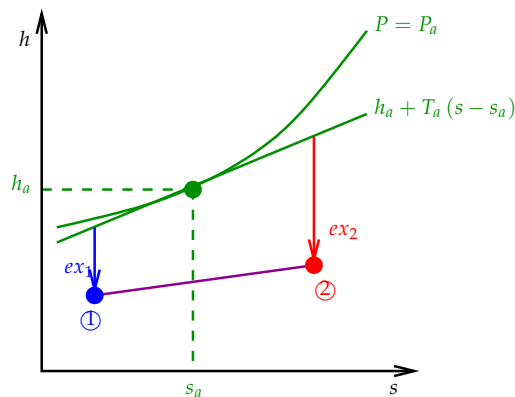
On remarque que l'exergie diminue entre l'entrée et la sortie de l'évaporateur alors que le fluide gagne de l'énergie thermique. Ceci est dû au fait que l'on chauffe le fluide à une température quasiment constante (du fait du changement de phase) et inférieure à la température ambiante.

Pour toute transformation augmentant l'enthalpie du fluide, si cette transformation s'accompagne d'une augmentation de son entropie et même si cette transformation est réversible, l'intégralité de l'augmentation d'enthalpie ne peut pas se transformer en travail utile. C'est ce que traduit le

terme en $(-T_a s)$ de l'expression de l'exergie, ce terme étant l'anergie du fluide. Il y a augmentation d'exergie uniquement si la pente de la droite reliant les points représentatifs des états du fluide en début et fin de transformation est supérieure à T_a (cf. schéma ci-dessous). Cette condition traduit le fait que quand il y a augmentation d'entropie, pour retourner à l'état ambiant, il faut céder une partie de l'énergie du fluide sous forme de chaleur à la source froide (dans le cas où l'exergie est positive), cette partie ne pouvant *jamais* être récupérée sous forme de travail, cette part « perdue » étant appelée anergie. Il faut donc que l'augmentation d'enthalpie soit supérieure à cette augmentation d'anergie.



Dans le cas qui nous intéresse de la vaporisation du fluide, la transformation se produit à une température inférieure à la température ambiante, ce qui se traduit par le fait que l'exergie du fluide diminue alors que son enthalpie augmente. C'est ce qui est schématisé sur la figure ci-dessous. Cela revient à dire que l'augmentation d'entropie de la transformation est telle que, lorsque l'on ramènera le fluide dans un état d'équilibre avec le milieu ambiant, on perdra plus d'énergie sous forme de chaleur que l'on récupèrera de travail.



On remarque que les dissipations d'exergie sont assez bien réparties entre les différents composants du circuit.

Définir et calculer le rendement exergetique de chaque composant et de la machine.

Correction

Au compresseur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\Delta ex}{\dot{W}'_{comp} / \dot{m}}$$

Au condenseur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{cond} (1 - T_a / T_{ech})}{\dot{m} \Delta ex}$$

A l'évaporateur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap} (1 - T_a / T_{ech})}{\dot{m} \Delta x}$$

Au détendeur, il n'y a ni travail ni chaleur échangée alors que la variation d'exergie est non nulle, ce qui signifie que le rendement est nul.

Enfin, on peut définir le rendement exergetique de la manière suivante :

$$\eta_{ex} = \frac{|\dot{Q}_{cond} (1 - T_a / T_{ech})|}{\dot{W}'}$$

Composant	η_{ex}
Compresseur	86%
Condenseur	43%
Détendeur	0%
Evaporateur	57%
Machine	14%

On rappelle que le coefficient de performance de la pompe à chaleur est défini par

$$\omega = \frac{|\dot{Q}_{cond}|}{\dot{W}'}$$

et que le coefficient de performance d'une machine de Carnot fonctionnant entre les températures (chaude) T_{ech} et (froide) T_a est

$$\omega_{max} = \frac{T_{ech}}{T_{ech} - T_a}$$

On a donc

$$\eta_{ex} = \frac{\omega}{\omega_{max}}$$

Dans le cas considéré, les températures d'échange au condenseur ($T_{ech} = 26.4^\circ\text{C}$) et ambiante ($T_a = 18^\circ\text{C}$) sont assez voisines si bien que le coefficient de performance de la machine de Carnot est très élevé (35.66), ce qui explique la faible valeur du rendement exergetique. Plus les températures des sources froide et chaude sont voisines, moins il est « compliqué » de transférer la chaleur de la source froide à la source chaude, ce qui explique que le coefficient de performance tende vers l'infini si les deux températures sont égales.

5 Optimisation exergetique

On suppose que l'on n'apporte aucune modification au cycle thermodynamique du fluide caloporteur. On change cependant les caractéristiques de l'échangeur à l'évaporateur et les conditions ambiantes afin d'étudier l'effet de ces modifications sur le rendement de l'évaporateur et de la machine.

On suppose que la température d'échange à l'évaporateur est 0°C et on considère deux températures ambiantes : 18°C (cas précédent) et 25°C .

Pour les deux températures ambiantes considérées, déterminer la dissipation d'entropie et le rendement exergetique de l'évaporateur pour les deux températures d'échange considérées.

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma} / \dot{m}$
3.5°C		
0°C		

A l'évaporateur, on a :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}} = [s]_6^1 - \frac{\dot{Q}_{evap}/\dot{m}}{T_{ech}}$$

L'état du fluide n'étant pas modifié, $[s]_6^1$ et \dot{Q}_{evap}/\dot{m} sont donnés et leurs valeurs ne sont donc pas modifiées. L'entropie créée dépend donc uniquement de la température d'échange T_{ech} :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}} = 0.646 - \frac{172.23}{T_{ech}}$$

T_{ech}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C	0.0234
0°C	0.0155

Cela montre en particulier que la création d'entropie est plus faible pour une température d'échange de 0°C. Ceci est dû au fait que l'écart de température entre le fluide caloporteur et l'air avec lequel il échange la chaleur est plus faible, ce qui réduit les irréversibilités externes.

L'expression du rendement exergetique de l'évaporateur est

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap} (1 - T_a/T_{ech})}{\dot{m} \Delta ex}$$

soit

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap}}{\dot{m}} \frac{1 - T_a/T_{ech}}{[h]_6^1 - T_a [s]_6^1}$$

Dans cette expression, seules T_a et T_{ech} varient. On a donc

$$\eta_{ex} = 172.23 \times \frac{1 - T_a/T_{ech}}{172.23 - 0.646 \times T_a}$$

A la **température ambiante de 18°C**, on a :

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C	57%	0.0234
0°C	71%	0.0155

Ce tableau montre que le rendement exergetique augmente dans une proportion plus forte que la baisse de la production d'entropie.

A la **température ambiante de 25°C**, on a :

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C	66%	0.0234
0°C	77%	0.0155

Ces deux tableaux montrent l'influence de la température ambiante sur le rendement exergetique : alors que la source d'entropie n'est pas influencée par la température ambiante, le rendement exergetique de l'évaporateur augmente avec la température ambiante. Cette augmentation est due au fait que si l'on considère une machine de Carnot entre l'air ambiant et l'air servant à l'échange avec le fluide caloporteur à l'évaporateur, le travail fourni par cette machine de Carnot sera d'autant plus important que la température ambiante est grande.

Le tableau ci-dessous donne le rendement exergetique de la machine pour les deux températures ambiantes.

$T_a = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$	$T_a = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$
14%	2%

Ce tableau montre que le rendement exergétique de la machine baisse fortement lorsque la température ambiante augmente (alors que son rendement énergétique reste inchangé) : plus la température ambiante augmente, moins le travail pouvant être obtenu à partir de la chaleur fournie au condenseur est faible.

Il faut noter que la très faible valeur du rendement exergétique provient du fait que la température ambiante est très proche de la température d'échange au condenseur, ce qui implique que le coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante est très élevé. La forte baisse du rendement exergétique provient donc de la forte augmentation du coefficient de performance maximum.

Annexe : quelques données thermodynamiques du R142b

Données à saturation

T (°C)	P^{sat} (bar)	h_l^{sat} (kJ/kg)	h_v^{sat} (kJ/kg)	s_l^{sat} (kJ/(kg.K))	s_v^{sat} (kJ/(kg.K))	\mathcal{L} (kJ/kg)
-10	1.5	187.19	409.76	0.952	1.798	222.6
18	3.13	213.52	425.48	1.062	1.790	212.0
40	5.2	252.14	441.27	1.177	1.781	189.1

Autres données

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	-25	168.64	0.875
1.5	-20	174.83	0.901
1.5	-15	181.01	0.926
1.5	-10	187.19	0.952
1.5	-10	409.76	1.798
1.5	-5	414.26	1.812
1.5	0	417.80	1.820
1.5	5	423.26	1.840
3.13	5	197.00	0.994
3.13	10	203.36	1.020
3.13	15	209.71	1.046
3.13	18	213.52	1.062
3.13	18	425.48	1.790
3.13	20	427.33	1.796
3.13	25	431.95	1.810
3.13	30	436.58	1.824
5.2	25	232.43	1.096
5.2	30	239.00	1.123
5.2	35	245.57	1.150
5.2	40	252.14	1.177
5.2	40	441.27	1.781
5.2	45	446.05	1.796
5.2	50	450.84	1.811
5.2	55	455.62	1.825
5.2	60	460.40	1.840

PC N°5

Devoir surveillé de Thermodynamique Appliquée 2014

Corrigé

Documents autorisés :

- Cours de thermodynamique appliquée édité par la caisse de secours
- TDs de thermodynamique appliquée édités par la caisse de secours
- Corrigés de TDs mis en ligne sur Claroline
- Notes manuscrites écrites par l'étudiant

Les ordinateurs et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Ce devoir surveillé est constitué d'un unique problème constitué de deux parties.

Toutes les réponses devront être fournies sur les feuilles de l'énoncé qui constitueront donc la copie finale.

Certaines questions sont à choix multiple. *Plusieurs bonnes réponses sont parfois possibles* parmi les choix proposés. Les points à ces questions seront accordés uniquement si *seules les bonnes réponses et toutes les bonnes réponses sont cochées* : si une mauvaise réponse est cochée ou si une bonne réponse n'est pas cochée, aucun point ne sera accordé pour la question. Il vaut donc mieux ne pas répondre au hasard.

1 Etude d'une turbine à gaz

Les ressources en énergie en général et en gaz naturel en particulier jouent un rôle important en géopolitique. La dépendance de certains pays au gaz naturel provient en partie de leurs besoins de production d'électricité à partir de la combustion de gaz naturel.

Beaucoup d'installations industrielles de grande taille permettant de produire de l'électricité à partir de la combustion de gaz naturel sont basées sur des turbines à gaz dont le schéma de principe est représenté sur la Fig. 1 ci-dessous. Après avoir été comprimé, l'air ambiant entre dans la chambre de combustion où il est mélangé au gaz naturel et le mélange ainsi créé y est brûlé. Les gaz de combustion, ou fumées, sont alors détendus dans une turbine reliée au compresseur et à l'alternateur qui produit l'électricité. Les fumées sont alors rejetées à l'atmosphère.

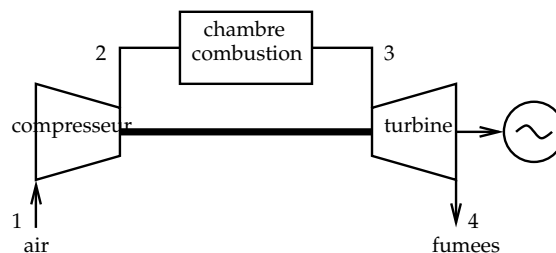


FIGURE 1 – Représentation schématique du fonctionnement d'une turbine à gaz

On suppose que le gaz a un comportement de gaz parfait et que ses propriétés thermodynamiques sont indépendantes de sa composition. Ce gaz parfait est tel que $r = 0,3 \text{ kJ}/(\text{kg.K})$ et $\gamma = 1,4$ quel que soit son état.

L'air entre dans les conditions ambiantes à la température de 25°C et à la pression atmosphérique de 10^5 Pa . La température maximale du gaz au cours du cycle est de 1700°C .

Le taux de compression du compresseur est $r_c = 15$.

Le rendement isentropique du compresseur est $\eta_c = 0,8$ et le rendement isentropique de la turbine est $\eta_t = 0,9$.

Le débit de masse de gaz à travers le circuit est supposé constant : $\dot{m} = 200 \text{ kg/s}$.

On suppose que la compression et la détente sont adiabatiques et que la combustion se fait à pression constante.

1.1 Modèle thermodynamique du fluide

1.1.1 Masse volumique

Question

Quelle est la valeur de la masse volumique du gaz à l'entrée du compresseur ?

Réponse

$$\rho_1 = 1.118 \text{ kg/m}^3$$

Correction

Le fluide ayant un comportement de gaz parfait, on a :

$$\rho = \frac{P}{r T}$$

A l'entrée du compresseur, on a donc

$$\rho_1 = \frac{P_a}{r T_a}$$

soit

$$\rho_1 = \frac{10^5}{0.3 \times 10^3 \times (25 + 273.15)} = 1.118 \text{ kg/m}^3$$

1.1.2 Capacité calorifique

Question

Quelle est la valeur de la capacité calorifique massique à pression constante du gaz ?

Réponse

$$C_p = 1.05 \text{ kJ/(kg.K)}$$

Correction

Pour un gaz parfait, on a

$$C_p - C_v = r$$

Or

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

D'où

$$C_p = r \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Par conséquent

$$C_p = 0.3 \times \frac{1.4}{0.4} = 1.05 \text{ kJ/(kg.K)}$$

1.2 Description générale du cycle

Le cycle idéal est défini tel que les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine sont égaux à 1.

1.2.1 Pressions

Question

Dans le tableau ci-dessous, indiquez les valeurs des pressions du gaz aux 4 points caractéristiques du circuit dans le cas du cycle idéal et dans le cas du cycle réel.

Réponse

Pression	Cycle idéal	Cycle réel
P_1	10^5 Pa	10^5 Pa
P_2	$15 \times 10^5 \text{ Pa}$	$15 \times 10^5 \text{ Pa}$
P_3	$15 \times 10^5 \text{ Pa}$	$15 \times 10^5 \text{ Pa}$
P_4	10^5 Pa	10^5 Pa

Correction

La pression du gaz à l'entrée du compresseur et à la sortie de la turbine est égale à la pression ambiante, soit 10^5 Pa , que le cycle soit idéal ou réel.

La pression à la sortie du compresseur est donnée par le taux de compression r_c :

$$\frac{P_2}{P_1} = r_c$$

soit

$$P_2 = 15 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Là encore, le taux de compression du compresseur est le même que la transformation soit idéal ou réelle.

La pression étant supposée constante à travers la chambre de combustion, on a $P_3 = P_2 = 15 \times 10^5 \text{ Pa}$.

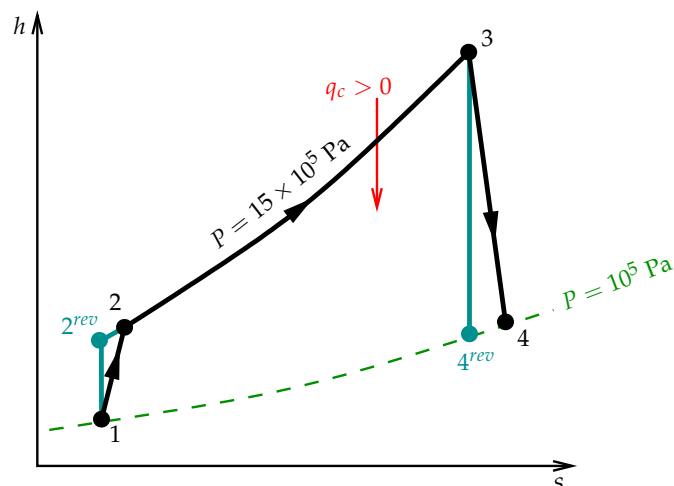
1.2.2 Diagramme de Mollier

Question

Représenter l'allure générale de la transformation du gaz entre son entrée dans le compresseur et sa sortie de la turbine dans un diagramme de Mollier.

Les deux cycles, idéal et réel, seront représentés sur ce même diagramme ; les points du cycle idéal seront représentés par un exposant rev .

Réponse



Correction

Dans un diagramme de Mollier $h-s$, les isobares d'un gaz parfait à C_p constant sont des exponentielles croissantes. Les isobares 10^5 Pa et 15×10^5 Pa sont représentées sur la figure.

Dans le cas du cycle idéal, la compression est adiabatique réversible donc isentropique. Le fluide recevant de la puissance mécanique à la traversée du compresseur, son enthalpie augmente. La pression de sortie étant donnée par le rapport de compression, on en déduit le point 2^{rev} représenté sur la figure.

Dans le cas du cycle réel, la pression de sortie du compresseur est la même. Mais la compression étant adiabatique irréversible, l'entropie du gaz augmente à la traversée du compresseur. D'où le point 2 représenté sur la figure.

La pression est supposée constante à la traversée de la chambre de combustion et la température maximale du gaz est la même que le cycle soit idéal ou réel. D'où le point 3 de la figure qui est le même pour les deux cycles.

Dans le cas du cycle idéal, la détente est adiabatique réversible donc isentropique. La pression du fluide à la sortie de la turbine étant égale à la pression ambiante, on en déduit le point 4^{rev} de la figure.

Dans le cas du cycle réel, la détente est adiabatique mais irréversible et l'entropie du gaz augmente donc lors de la détente. Sa pression étant égale à la pression ambiante, on en déduit le point 4 de la figure.

1.2.3 Températures

Question

Quel est le point du circuit où la température du gaz est la plus élevée ?

Réponse

☐ Point 1 ☐ Point 2 ☒ Point 3 ☐ Point 4

Question

Parmi les relations ci-dessous, indiquer celles qui sont vraies.

Réponse

<input type="checkbox"/> $T_2 < T_2^{rev}$	<input type="checkbox"/> $T_2 = T_2^{rev}$	<input checked="" type="checkbox"/> $T_2 > T_2^{rev}$
<input type="checkbox"/> $T_3 < T_3^{rev}$	<input checked="" type="checkbox"/> $T_3 = T_3^{rev}$	<input type="checkbox"/> $T_3 > T_3^{rev}$
<input type="checkbox"/> $T_4 < T_4^{rev}$	<input type="checkbox"/> $T_4 = T_4^{rev}$	<input checked="" type="checkbox"/> $T_4 > T_4^{rev}$

Correction

Un gaz parfait est tel que son enthalpie ne dépend que de sa température. Les valeurs relatives des températures du gaz se déduisent donc immédiatement des valeurs relatives de l'enthalpie lisibles sur le diagramme de Mollier.

1.3 Etats du gaz dans le circuit

1.3.1 Sortie du compresseur

Question

Dans le cas du cycle idéal, quelle est l'expression de la température du gaz à la sortie du compresseur ? Donner sa valeur numérique.

Réponse

$$T_2^{rev} = T_1 r_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_2^{rev} = 646.34 \text{ K}$$

Correction

Dans le cas du cycle idéal, la compression est adiabatique réversible et donc isentropique. Le gaz ayant un comportement de gaz parfait à C_p constant, une transformation isentropique est telle que

$$\frac{p\gamma-1}{T\gamma} = cte$$

On a donc

$$T_2^{rev} = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 r_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

soit

$$T_2^{rev} = (25 + 273.15) \times 15^{\frac{0.4}{1.4}} = 646.34 \text{ K}$$

Dans le circuit réel, la température à la sortie du compresseur est $T_2 = 460.24^\circ\text{C}$.

1.3.2 Sortie de la turbine

Dans le circuit idéal, la température à la sortie de la turbine est $T_4^{rev} = 910.2 \text{ K}$

Question

Quelle est l'expression de la température T_4 ?

Quelle est sa valeur ?

Réponse

$$T_4 = T_3 + \eta_t (T_4^{rev} - T_3)$$
$$T_4 = 1016.5 \text{ K}$$

Correction

Par définition, le rendement isentropique de détente est

$$\eta_t = \frac{h_4 - h_3}{h_4^{rev} - h_3}$$

Le gaz ayant un comportement de gaz parfait à C_p constant

$$\Delta h = C_p \Delta T$$

Par conséquent

$$\eta_t = \frac{T_4 - T_3}{T_4^{rev} - T_3}$$

Donc

$$T_4 = T_3 + \eta_t (T_4^{rev} - T_3)$$

soit

$$T_4 = (1700 + 273.15) + 0.9 \times (910.2 - (1700 + 273.15)) = 1016.50 \text{ K}$$

1.4 Analyse énergétique

1.4.1 Puissance fournie au fluide

Question

Quelle est l'expression de la puissance \dot{P} fournie au fluide à travers un composant en fonction des températures du gaz T_e et T_s à l'entrée et à la sortie du composant ?

Réponse

$$\dot{P} = \dot{m} C_p (T_s - T_e)$$

Question

Parmi les affirmations suivantes quelles hypothèses sont nécessaires pour déterminer cette expression ?

Réponse

- ☒ L'écoulement est stationnaire
- ☐ La transformation est réversible
- ☒ L'enthalpie du fluide ne dépend que de sa température
- ☒ La variation d'énergie cinétique est négligée
- ☒ La variation d'énergie potentielle est négligée
- ☒ C_p est constant
- ☐ L'évolution est isentropique

Correction

L'expression générale du bilan d'énergie appliqué au gaz compris entre l'entrée et la sortie d'un composant du circuit est la suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \sum_{s-e} \dot{m} (h + e_p + e_c) + \dot{P}$$

où \dot{P} est la puissance fournie au système par l'extérieur (sous forme mécanique et calorifique).

L'écoulement étant supposé stationnaire, le membre de gauche de cette équation est nul et le bilan de masse implique que les débits de masse à l'entrée et à la sortie sont égaux. Par ailleurs, les variations d'énergie potentielle e_p et d'énergie cinétique e_c peuvent être négligées, on en déduit :

$$\dot{m} (h_s - h_e) = \dot{P}$$

Le gaz ayant un comportement de gaz parfait, son enthalpie ne dépend que de sa température. Etant en outre à C_p constant, on a

$$\Delta h = C_p \Delta T$$

On a finalement

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{P}$$

On note que cette relation est valable que la transformation soit réversible ou non.

1.4.2 Puissances

Question

Compléter le tableau ci-dessous des puissances fournies au fluide à travers chaque composant.

Réponse

Composant	Circuit idéal	Circuit réel
Compresseur	$\dot{W}_c^{rev} = 73.12 \text{ MW}$	$\dot{W}_c = 91.40 \text{ MW}$
Chambre de combustion	$\dot{Q}^{rev} = 278.63 \text{ MW}$	$\dot{Q} = 260.35 \text{ MW}$
Turbine	$\dot{W}_t^{rev} = -223.22 \text{ MW}$	$\dot{W}_t = -200.90 \text{ MW}$
Puissance fournie à l'alternateur	$\dot{W}_{alt}^{rev} = 150.10 \text{ MW}$	$\dot{W}_{alt} = 109.50 \text{ MW}$

Correction

A travers le compresseur, adiabatique, on a

$$\dot{W}_c = \dot{m} C_p (T_2 - T_1)$$

soit

$$\dot{W}_c = 200 \times 1.05 \times (460.24 - 25) = 91400 \text{ kW}$$

A travers la turbine, adiabatique, on a

$$\dot{W}_t = \dot{m} C_p (T_4 - T_3)$$

soit

$$\dot{W}_t = 200 \times 1.05 \times (1016.5 - (1700 + 273.15)) = -200897 \text{ kW}$$

Une partie de la puissance générée à la turbine est fournie au compresseur, le complément étant fourni à l'alternateur. Cela se traduit par l'équation suivante :

$$-\dot{W}_t = \dot{W}_c + \dot{W}_{alt}$$

soit

$$\dot{W}_{alt} = -(\dot{W}_t + \dot{W}_c)$$

Pour les cycles réversible et réel, on a respectivement :

$$\dot{W}_{alt}^{rev} = -(-223.22 + 73.12) = 150.10 \text{ MW}$$

$$\dot{W}_{alt} = -(-200.90 + 91.40) = 109.50 \text{ MW}$$

1.4.3 Rendement énergétique

Question

Donner la définition du rendement énergétique de cette installation.

Réponse

$$\eta_{en} = \frac{\dot{W}_{alt}}{\dot{Q}}$$

Question

Donner la valeur du rendement énergétique des circuits idéal et réel.

Réponse

	Circuit idéal	Circuit réel
Rendement énergétique	$\eta_{en}^{rev} = 53.9\%$	$\eta_{en} = 42.1\%$

Correction

Ce cycle est un cycle *moteur* dans le sens où il permet de générer de la puissance mécanique fournie à l'alternateur à partir de la puissance calorifique fournie dans la chambre de combustion. Le rendement énergétique du cycle est donc défini par

$$\eta_{en} = \frac{\dot{W}_{alt}}{\dot{Q}}$$

Les valeurs de ce rendement pour les cycles idéal et réel sont respectivement

$$\eta_{en}^{rev} = \frac{150.10}{278.63} = 53.9\%$$

$$\eta_{en} = \frac{109.50}{260.35} = 42.1\%$$

1.5 Analyse exergetique

1.5.1 Dissipations d'exergie

Question

Donner l'expression de la dissipation d'exergie à la traversée du compresseur faisant intervenir T_1 , T_2 et r_c .

Réponse

$$\dot{D}_{acomp} = \dot{m} T_a \left[C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln(r_c) \right]$$

Question

Parmi les affirmations suivantes quelles hypothèses sont nécessaires pour déterminer cette expression ?

Réponse

- ☒ L'écoulement est stationnaire
- ☐ La transformation est réversible
- ☒ Le fluide a un comportement de gaz parfait
- ☐ La variation d'énergie cinétique est négligée
- ☐ La variation d'énergie potentielle est négligée
- ☒ C_p est constant
- ☐ L'évolution est isentropique

Correction

La dissipation d'exergie est donnée par

$$\dot{D}_a = T_a \dot{\sigma}_S$$

où $\dot{\sigma}_S$ est la source irréversible d'entropie.

Or, le bilan d'entropie appliqué au système ouvert constitué du fluide présent dans le compresseur s'écrit

$$\frac{dS}{dt} = - \sum_{s-e} \dot{m} s + \frac{\dot{Q}}{T_{ech}} + \dot{\sigma}_S$$

L'écoulement étant stationnaire ($dS/dt = 0$) et la compression étant adiabatique ($\dot{Q} = 0$), on a

$$\dot{\sigma}_{Scomp} = \dot{m} (s_2 - s_1)$$

Par conséquent

$$\dot{D}_{acomp} = \dot{m} T_a (s_2 - s_1)$$

Or, pour un gaz parfait à C_p constant, l'expression de l'entropie est la suivante :

$$s(P, T) = s_0 + C_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - r \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

Par conséquent

$$\dot{D}_{acomp} = \dot{m} T_a \left[C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]$$

soit

$$\dot{D}_{acomp} = \dot{m} T_a \left[C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln(r_c) \right]$$

Question

Donner les valeurs numériques de la dissipation d'exergie à la traversée du compresseur dans le tableau ci-dessous.

Réponse

	Circuit idéal	Circuit réel
\dot{D}_{acomp}	0 MW	7.91 MW

Correction

Dans le cas du circuit idéal, la compression est réversible et la dissipation d'exergie est donc nulle.

Dans le cas du circuit réel, on a

$$\dot{D}_{\text{comp}} = 200 \times (25 + 273.15) \left[1.05 \times \ln \left(\frac{460.25 + 273.15}{25 + 273.15} \right) - 0.3 \times \ln(15) \right] = 7912 \text{ kW}$$

Question

A quels phénomènes physiques cette dissipation est-elle due ?

Réponse

Correction

La dissipation d'exergie est due à des irréversibilités internes ou externes. Dans le cas d'un compresseur adiabatique, ces irréversibilités sont internes et dues aux variations locales de la vitesse et de la température du fluide au sein du compresseur. Les variations locales de la vitesse donnent lieu à des frottements locaux internes qui sont source de dissipation d'exergie et les variations locales de la température donnent lieu à des transferts thermiques conductifs qui sont également source de dissipation d'exergie. Dans le cas d'un compresseur, ce sont généralement les frottements qui sont prépondérants dans la dissipation d'exergie.

La dissipation totale d'exergie dans le circuit réel est de 15 MW.

Question

Où cette puissance se retrouve-t-elle ?

Réponse

☐

Dans l'air ambiant réchauffé par le compresseur et la turbine

☒

Dans les fumées

☐

A l'alternateur

Correction

A la traversée d'un composant, la dissipation d'exergie se retrouve sous forme d'enthalpie non valorisée sous forme mécanique à la sortie du composant. Dans le cas du circuit étudié, la dissipation d'exergie se retrouve donc dans l'enthalpie des fumées à la sortie de la turbine.

1.5.2 Puissance mécanique récupérable à partir des fumées

Les fumées à la sortie de la turbine sont encore à une température élevée et donc énergétiques. On cherche à valoriser cette énergie sous forme mécanique.

Question

Dans le cas du circuit réel, donner l'expression de la puissance mécanique maximale récupérable à partir de l'énergie des fumées à la sortie de la turbine.

Réponse

$$\dot{W}_{\text{max}} = \dot{m} (ex_4 - ex_a) = \dot{m} C_p \left[(T_4 - T_a) - T_a \ln \left(\frac{T_4}{T_a} \right) \right]$$

Question

Quelle est sa valeur ?

Réponse

☐

8 MW

☐

15 MW

☐

57 MW

☒

74 MW

☐

151 MW

Correction

Par définition, l'exergie est l'énergie mécanique maximale récupérable à partir d'un fluide sous un état donné. La puissance maximale récupérable à partir des fumées en sortie de turbine est donc

$$\dot{W}_{max} = \dot{m} (ex_4 - ex_a)$$

Or, par définition

$$ex_4 - ex_a = (h_4 - h_a) - T_a (s_4 - s_a)$$

Le gaz ayant un comportement de gaz parfait à Cp constant, on a

$$(h_4 - h_a) = Cp (T_4 - T_a)$$

$$(s_4 - s_a) = Cp \ln \left(\frac{T_4}{T_a} \right) - r \ln \left(\frac{P_4}{P_a} \right)$$

D'où

$$\dot{W}_{max} = \dot{m} \left[Cp (T_4 - T_a) - T_a \left(Cp \ln \left(\frac{T_4}{T_a} \right) - r \ln \left(\frac{P_4}{P_a} \right) \right) \right]$$

Or

$$P_4 = P_a$$

d'où finalement

$$\dot{W}_{max} = \dot{m} Cp \left[(T_4 - T_a) - T_a \ln \left(\frac{T_4}{T_a} \right) \right]$$

soit

$$\dot{W}_{max} = 200 \times 1.05 \times \left[(1016.50 - (25 + 273.15)) - (25 + 273.15) \times \ln \left(\frac{1016.50}{25 + 273.15} \right) \right] = 74059 \text{ kW}$$

2 Cycle combiné

L'énergie des fumées en sortie de turbine à gaz peut être valorisée en récupérant une partie pour produire de la puissance mécanique pouvant à son tour être transformée en puissance électrique. Pour cela, on suppose que l'on couple la turbine à gaz à un cycle de Rankine tel que représenté sur la figure 2.

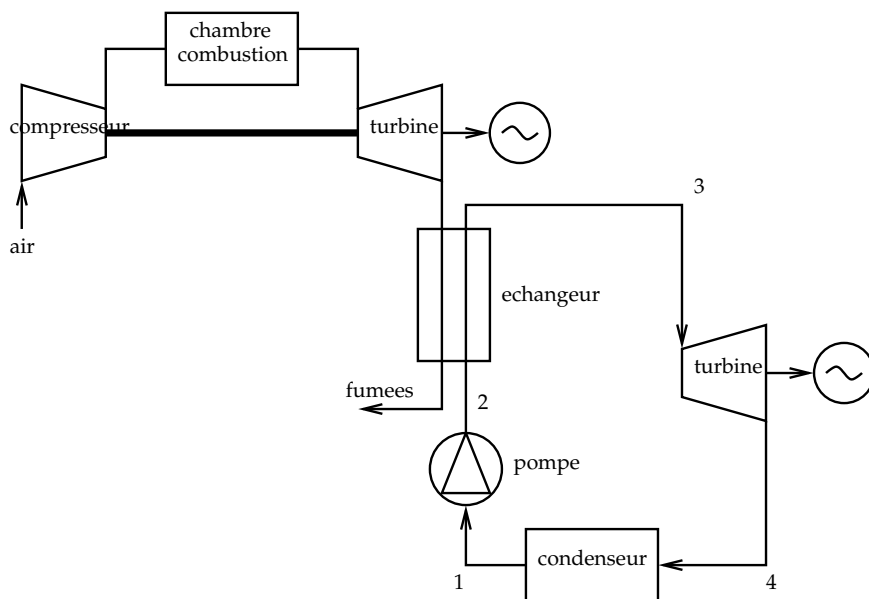


FIGURE 2 – Représentation schématique d'un cycle combiné.

Les fumées en sortie de turbine à gaz cèdent une partie de leur énergie au fluide caloporteur du cycle de Rankine, qui est de l'eau, à travers un échangeur que l'on suppose parfaitement adiabatique. L'énergie ainsi cédée sert à vaporiser l'eau qui est ensuite détendue dans une turbine à vapeur. L'eau est alors entièrement

condensée à travers un échangeur de chaleur puis est pompée avant de rentrer dans le premier échangeur. Le sens de circulation de l'eau est indiqué sur la figure.

Les pressions basse et haute de ce circuit secondaire sont respectivement 1 bar et 50 bar et les rendements isentropiques de la pompe et de la turbine à vapeur sont respectivement $\eta_{pr} = 0,9$ et $\eta_{tr} = 0,95$.

On considère un circuit de référence pour lequel les états du fluide aux différents points du circuit sont les suivants :

Point du circuit secondaire	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))	x (-)
1	99.61	417.44	1.3030	0
2	100.14	423.38	1.3045	0
3	550	3550.75	7.1235	1
4	99.61	2635.42	7.2528	0.9825

Les données thermodynamiques utiles sont données en annexe.

2.1 Puissance calorifique reçue à l'échangeur

2.1.1 Température des fumées en sortie d'échangeur

Question

Quelle est la température *minimale* des fumées à la sortie de l'échangeur ?

Réponse

$$T_f^{min} = T_2 = 100.14^\circ\text{C} = 373.29 \text{ K}$$

Correction

Pour que l'échange d'énergie sous forme de chaleur soit possible entre les fumées et l'eau du cycle de Rankine, il est nécessaire que la température des fumées soit supérieure ou égale à celle de cette eau. La température la plus faible des fumées est atteinte en sortie d'échangeur (pour les fumées), c'est-à-dire là où l'eau du cycle de Rankine entre dans l'échangeur, c'est-à-dire en 2, car cet échangeur est à contre-courant. Or, la température de l'eau à l'entrée de l'échangeur est $T_2 = 100.14^\circ\text{C}$. Par conséquent $T_f \geq 100.14^\circ\text{C}$.

Pour s'assurer que l'échange thermique au sein de l'échangeur soit suffisamment efficace, la température des fumées du circuit primaire à la sortie de l'échangeur est fixée à $T_f^s = 140^\circ\text{C}$.

2.1.2 Puissance calorifique échangée

Question

Quelle est l'expression de la puissance calorifique fournie par les fumées au fluide secondaire en fonction des variables d'état thermodynamique des fumées à l'entrée et à la sortie de l'échangeur ?

Réponse

$$\dot{Q}_e = \dot{m} C_p (T_4 - T_f^s)$$

Question

Quelle est sa valeur ?

Réponse

$$\dot{Q}_e = 126.7 \text{ MW}$$

Correction

On applique le bilan d'énergie aux fumées comprises dans l'échangeur. L'écoulement est stationnaire, on peut négliger les variations d'énergies cinétique et potentielle et la puissance mécanique fournie au système est nulle. La puissance calorifique reçue par l'eau \dot{Q}_e est cédée par les fumées, ce qui signifie que la puissance calorifique reçue par les fumées est $-\dot{Q}_e$. On a donc :

$$-\dot{m} (h_f^s - h_4) - \dot{Q}_e = 0$$

Les fumées étant assimilées à un gaz parfait à C_p constant

$$h_f^s - h_4 = C_p (T_f^s - T_4)$$

On a finalement

$$\dot{Q}_e = \dot{m} C_p (T_4 - T_f^s)$$

soit

$$\dot{Q}_e = 200 \times 1.05 \times (1016.50 - (140 + 273.15)) = 126704 \text{ kW}$$

2.2 Analyse du circuit secondaire de référence

Question

Quelle est l'expression du débit de masse du circuit secondaire de référence ?

Réponse

$$\dot{m}^{ref} = \frac{\dot{Q}_e}{h_3^{ref} - h_2^{ref}}$$

Question

Quelle est sa valeur ?

Réponse

$$\dot{m}^{ref} = 40.5 \text{ kg/s}$$

Correction

Le bilan d'énergie appliqué à l'eau au sein de l'échangeur donne :

$$\dot{m}^{ref} (h_3^{ref} - h_2^{ref}) = \dot{Q}_e$$

\Leftrightarrow

$$\dot{m}^{ref} = \frac{\dot{Q}_e}{h_3^{ref} - h_2^{ref}}$$

soit

$$\dot{m}^{ref} = \frac{126.7 \times 10^3}{3550.75 - 423.38} = 40.5 \text{ kg/s}$$

On montre alors que la puissance mécanique fournie par la turbine du circuit secondaire est

$$\dot{W}_t^{ref} = 37.08 \text{ MW}$$

2.3 Recherche d'optimisation du circuit secondaire

Pour tenter d'optimiser le circuit secondaire, on augmente la température maximale du fluide jusqu'à 650°C sans modifier les pressions haute et basse du circuit. L'état du fluide à l'entrée de la pompe est inchangé.

Question

Pourquoi une telle température peut-elle effectivement être atteinte étant données les caractéristiques des fumées à la sortie de la turbine du circuit primaire ?

Réponse

La température des fumées à la sortie du circuit primaire est d'environ 740°C (1016.5 K = 743.35°C). Pour que l'échangeur puisse fonctionner, la différence entre les températures des fluides primaire et secondaire doit toujours être *positive*. Avec une température de 650°C du fluide secondaire en sortie d'échangeur où les fumées du circuit primaire entrent dans l'échangeur, cette condition est bien vérifiée : 740°C > 650°C.

2.3.1 Modification du fonctionnement du circuit secondaire

Question

Quel paramètre de fonctionnement du circuit secondaire doit être modifié pour augmenter la température maximale du fluide jusqu'à 650°C ?

Réponse

Paramètre à modifier : le débit de masse

Question

Quelle est sa nouvelle valeur ?

Réponse

Nouvelle valeur : 37.71 kg/s

Correction

Pour une puissance calorifique fournie au fluide donnée, le bilan d'énergie montre que plus le débit de masse est faible, plus l'enthalpie du fluide, et donc sa température, à la sortie de l'échangeur est importante :

$$h_s = h_e + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

D'après les tables thermodynamiques, l'enthalpie de l'eau à 50 bar et 650°C est $h_3 = 3783.28$ kJ/kg. Par conséquent

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_e}{h_3 - h_2^{ref}} = \frac{126.7 \times 10^3}{3783.28 - 423.38} = 37.71 \text{ kg/s}$$

2.3.2 Nouvel état du fluide en sortie de turbine

Question

Déterminer la valeur de l'enthalpie du fluide en sortie de turbine. Pour cette question, on fournira le détail du raisonnement ci-dessous.

Réponse

On suppose tout d'abord que la détente est *réversible*. Etant adiabatique, elle est isentropique. On a donc

$$s_4^{is} = s_3 = 7.3901 \text{ kJ/(kg.K)}$$

En utilisant les données thermodynamiques à la pression de 1 bar, on en déduit que l'enthalpie du fluide est

$$h_4^{is} = 2675.77 + \frac{7.3901 - 7.3610}{7.6147 - 7.3610} \times (2776.59 - 2675.77) = 2687.33 \text{ kJ/kg}$$

La détente réelle est caractérisée par le rendement isentropique de détente défini par

$$\eta_d = \frac{h_4 - h_3}{h_4^{is} - h_3}$$

ce qui permet de déterminer h_4 :

$$h_4 = h_3 + \eta_d (h_4^{is} - h_3)$$

on en déduit

$$h_4 = 3783.28 + 0.95 \times (2687.33 - 3783.28) = 2742.13 \text{ kJ/kg}$$

Question

Quelle est l'état du fluide en sortie de turbine ?

Réponse

- ☒ Monophasique vapeur
☐ Diphasique liquide-vapeur
☐ Monophasique liquide

Correction

D'après les tables thermodynamique, l'enthalpie de la vapeur à saturation à 1 bar est

$$h_v^{sat} = 2674.95 \text{ kJ/kg}$$

On a donc

$$h_4 > h_v^{sat}$$

ce qui signifie que l'eau est de la vapeur surchauffée ; elle est donc sous forme monophasique vapeur.

2.3.3 Nouvelle puissance fournie à l'alternateur

Question

Quelle est la valeur de la puissance fournie à l'alternateur ?

Réponse

$$\dot{W}_{alt} = -\dot{m} (h_4 - h_3) = 39.26 \text{ MW}$$

Annexe : quelques données thermodynamiques de l'eau

Données à saturation

P^{sat} (bar)	T (°C)	h_l^{sat} (kJ/kg)	h_v^{sat} (kJ/kg)	s_l^{sat} (kJ/(kg.K))	s_v^{sat} (kJ/(kg.K))
1	99.61	417.44	2674.95	1.3026	7.3588
50	263.94	1154.5	2794.23	2.9207	5.9737

Autres données

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1	0	0.06	-0,0001
1	50	209,41	0,7038
1	99,61	417,44	1,3030
1	99,61	2674,95	7,3588
1	100	2675,77	7,3610
1	150	2776,59	7,6147
1	200	2875,48	7,8356
1	250	2974,54	8,0346
1	300	3074,54	8,2171
1	350	3175,82	8,3865
1	400	3278,54	8,5451
1	450	3382,81	8,6945
1	500	3488,71	8,8361
1	550	3596,28	8,9709
1	600	3705,57	9,0998
1	650	3816,6	9,2234
50	0	5,03	0,0001
50	50	213,63	0,7015
50	100	422,78	1,3030
50	150	635,06	1,8369
50	200	853,8	2,3254
50	250	1085,66	2,7909
50	263,94	1154,5	2,9207
50	263,94	2794,23	5,9737
50	300	2925,64	6,2109
50	350	3069,29	6,4515
50	400	3196,59	6,6481
50	450	3317,03	6,8208
50	500	3434,48	6,9778
50	550	3550,75	7,1235
50	600	3666,83	7,2604
50	650	3783,28	7,3901