

# Devoir surveillé de Thermodynamique Appliquée

## Etude de centrales géothermiques

### Corrigé

13 mars 2012

Documents autorisés :

- Cours de thermodynamique appliquée édité par la caisse de secours
- TDs de thermodynamique appliquée édité par la caisse de secours
- Corrigés de TDs mis en ligne sur Claroline
- Notes manuscrites écrites par l'étudiant

Les ordinateurs et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Toutes les réponses fournies devront être clairement justifiées. ***Un résultat énoncé sans justification ne sera pas pris en compte.***

De nombreux pays disposent de ressources géothermiques importantes exploitées soit pour le chauffage soit pour faire fonctionner des centrales électrogènes de faible puissance.

On étudie deux types de centrales géothermiques électrogènes dont le principe décrit correspond à des installations existantes (respectivement Vallee Secolo, Italie, et Beowawe, USA).

Les deux problèmes sont indépendants.

## 1 Centrale géothermique avec vapeur sèche

Dans cette première installation, une source de vapeur humide à haute température fournit, après être passée dans une installation spécifique une vapeur sèche surchauffée ① qui se détend ensuite dans une turbine. Le fluide sortant ② passe alors dans un condenseur. L'eau liquide qui en est extraite, après avoir été comprimée par une pompe alimentaire, est pulvérisée au sommet d'une tour de refroidissement. L'eau liquide refroidie est récupérée à la base de la tour puis réinjectée dans le sol.



### 1.1.1 Détente réversible

On suppose dans un premier temps que la détente de la vapeur à travers la turbine est réversible et on note ②' l'état du fluide en sortie de turbine.

Montrer que l'état ②' est diphasique.

Déterminer les caractéristiques thermodynamiques de l'état ②' : enthalpie massique  $h_{2'}$ , entropie massique  $s_{2'}$ , température  $T_{2'}$  et titre vapeur  $x_{2'}$ .

#### Correction

La pression de l'état ②' est la même que celle de l'état ② :

$$P_{2'} = P_2 = 7.4 \text{ kPa}$$

La transformation ①→②' étant adiabatique réversible, elle est isentropique et on a donc

$$s_{2'} = s_1 = 6.9665 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

On remarque que  $s_l^{sat} < s_{2'} < s_v^{sat}$ , ce qui signifie que l'état ②' est diphasique. Le titre de vapeur de cet état est donné par

$$x_{2'} = \frac{s_{2'} - s_l^{sat}}{s_v^{sat} - s_l^{sat}} = \frac{6.9665 - 0.5725}{8.2570 - 0.5725} = 0.8321$$

Or

$$h_{2'} = h_l^{sat} + x_{2'} (h_v^{sat} - h_l^{sat}) = 167.57 + 0.8321 \times (2574.30 - 167.57) = 2170.21 \text{ kJ/kg}$$

L'état ②' étant diphasique liquide-vapeur, il est à saturation à la pression  $P_{2'}$  et sa température est donc la température de saturation de l'eau à cette pression, soit

$$T_{2'} = T^{sat}(P_{2'}) = 40^\circ\text{C} = 313.15 \text{ K}$$

### 1.1.2 Détente réelle

On considère à présent la détente réelle.

Montrer que l'état ② en sortie de turbine est diphasique.

Déterminer les caractéristiques thermodynamiques de l'état ② : enthalpie massique  $h_2$ , entropie massique  $s_2$ , température  $T_2$  et titre vapeur  $x_2$ .

#### Correction

La turbine ne fonctionne pas de manière réversible puisque son rendement isentropique est inférieur à 1. Par définition du rendement isentropique d'une turbine, on a :

$$\eta_{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2'}}$$

où l'état ②' correspondant à une détente adiabatique *réversible* pour laquelle le rapport de compression est le même que celui de la turbine réelle (irréversible).

On en déduit :

$$h_2 = h_1 + \eta_{is} (h_{2'} - h_1) \quad (1)$$

L'application numérique donne :

$$h_2 = 2850.10 + 0.85 \times (2170.21 - 2850.10) = 2272.19 \text{ kJ/kg}$$

On remarque que  $h_l^{sat} < h_2 < h_v^{sat}$ , ce qui signifie que l'état ② est diphasique. Son titre de vapeur est donné par

$$x_2 = \frac{h_2 - h_l^{sat}}{h_v^{sat} - h_l^{sat}} = \frac{2272.19 - 167.57}{2574.30 - 167.57} = 0.8745$$

L'entropie du fluide est donnée par

$$s_2 = s_l^{sat} + x_2 (s_v^{sat} - s_l^{sat}) = 0.5725 + 0.8745 \times (8.2570 - 0.5725) = 7.2926 \text{ kJ}/(\text{kg.K})$$

On vérifie que  $s_2 > s_2'$ , ce qui est caractéristique du fait que la transformation réelle est irréversible.

Le fluide dans l'état ② étant sous forme diphasique, sa température est égale à la température de saturation à la pression  $P_2$  :

$$T_2 = T^{sat}(P_2) = 40^\circ\text{C} = 313.15 \text{ K}$$

## 1.2 Diagramme thermodynamique

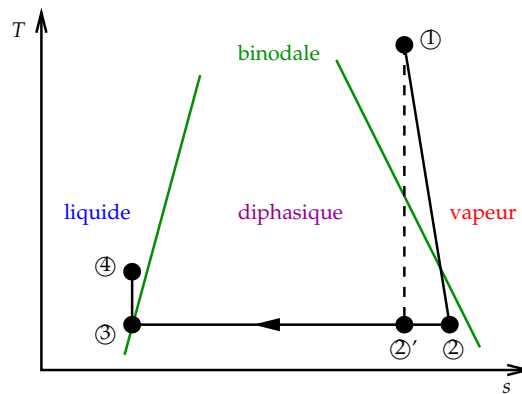
Tracer dans un diagramme  $T - s$  l'évolution réaliste du fluide sur le trajet ① ② ③.

### Correction

L'état ① est de la vapeur surchauffée et se situe donc dans la zone de vapeur sur le diagramme.

L'état ② se trouve dans la zone diphasique proche de la branche vapeur de la courbe binodale. L'entropie augmente entre les états ① et ② car la turbine fonctionne de manière adiabatique mais non réversible ; son entropie augmente donc du fait des irréversibilités internes.

L'état ③ est du liquide à saturation et se trouve donc sur la branche liquide de la courbe binodale.



A noter que l'entropie de l'état ④ est *a priori* plus grande que celle de l'état ③ mais que l'énoncé stipule (plus loin) que la pompe fonctionne de manière adiabatique réversible et donc isentropique.

## 1.3 Puissance mécanique de la turbine

Exprimer la puissance mécanique récupérée à la turbine et calculer sa valeur numérique. *Le système étudié sera identifié et toutes les hypothèses utilisées pour aboutir au résultat seront explicitées.*

### Correction

Le bilan d'énergie appliqué au système ouvert composé du fluide compris entre l'entrée et la sortie de la turbine s'écrit

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = - \sum_{s-e} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette équation est nul et on a également  $\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m}_1$ .

Les variations d'énergies potentielle et cinétique étant négligeables,  $\sum_{s-e} \dot{m} (e_c - e_p) = 0$ .

La turbine étant parfaitement calorifugée, la puissance calorifique fournie par l'extérieur est nulle :  $\dot{Q} = 0$ .

On a donc

$$\dot{W}' = \dot{m}_1 (h_2 - h_1) \quad (2)$$

soit

$$\dot{W}' = 110 \times (2272.19 - 2850.10) = -63570 \text{ kW}$$

Or, cette puissance est celle fournie par l'extérieur au fluide. La puissance récupérée est celle fournie par le fluide à la turbine qui est donc l'opposée :  $\boxed{63.6 \text{ MW}}$ .

## 1.4 Condenseur

Le fluide de refroidissement du condenseur est de l'eau liquide entrant à la température ambiante et circulant à un débit massique  $\dot{m}_c = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$ .

Exprimer la température  $T_9$  de cette eau à la sortie du condenseur et calculer sa valeur.

Exprimer la puissance calorifique cédée par le fluide du circuit au fluide de refroidissement au sein du condenseur et calculer sa valeur.

### Correction

On applique le bilan d'énergie à l'ensemble des fluides présents à l'intérieur du condenseur :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = - \sum_{s=e} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette relation est nul. Aucune puissance mécanique n'est fournie, d'où  $\dot{W}' = 0$ , et le condenseur est parfaitement calorifugé, d'où  $\dot{Q} = 0$ .

On a donc

$$\dot{m}_1 h_3 + \dot{m}_c h_9 = \dot{m}_1 h_2 + \dot{m}_c h_8$$

soit

$$h_9 = h_8 + \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_c} (h_2 - h_3)$$

Or, la transformation du liquide de refroidissement (de l'eau liquide) étant isobare, on a

$$dh = C_{p_l} dT$$

$C_{p_l}$  étant constant, on en déduit :

$$h_9 - h_8 = C_{p_l} (T_9 - T_8)$$

et on a donc

$$T_9 = T_8 + \frac{\dot{m}_1}{C_{p_l} \dot{m}_c} (h_2 - h_3)$$

soit

$$T_9 = (273.15 + 20) + \frac{110}{3 \cdot 10^3 \times 4,185} \times (2272.19 - 167.57) = 311.59 \text{ K} = 38.44^\circ\text{C}$$

La puissance calorifique échangée entre le fluide du circuit principal et le fluide de refroidissement est

$$\dot{Q}_c = \dot{m}_1 (h_2 - h_3) = \dot{m}_c C_{p_l} (T_9 - T_8)$$

soit

$$\dot{Q}_c = 110 \times (2272.19 - 167.57) = 231\,508 \text{ kW}$$

## 1.5 Dissipation exergetique à la turbine

Déterminer la dissipation exergetique  $\dot{D}_t^*$  à la turbine et calculer sa valeur.

### Correction

Le bilan d'exergie s'écrit

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p - T_a \mathcal{S}) = - \sum_{s=e} \dot{m} (h + e_p + e_c - T_a s) + \dot{W}' + \dot{Q} \left( 1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) - \dot{D}_t^*$$

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette relation est nul. La turbine étant parfaitement calorifugée,  $\dot{Q} = 0$ . Enfin, les variations d'énergies cinétique et potentielle étant négligées, on a :

$$\dot{D}_t^* = \dot{W}' - \dot{m}_1 [(h_2 - h_1) - T_a (s_2 - s_1)]$$

Par ailleurs, en tenant compte du bilan d'énergie (2), on a :

$$\boxed{\dot{D}_t^* = \dot{m}_1 T_a (s_2 - s_1)} \quad (3)$$

soit

$$\boxed{\dot{D}_t^* = 110 \times (273.15 + 20) \times (7.2926 - 6.9665) = 10\,515.58 \text{ kW}}$$

## 1.6 Pompe d'alimentation

La pompe d'alimentation doit fournir à l'eau liquide la puissance nécessaire pour lui permettre d'atteindre le sommet de la tour de refroidissement situé à 10 m au-dessus du condenseur.

Déterminer la valeur de la puissance mécanique que la pompe doit fournir dans l'hypothèse où son fonctionnement est adiabatique réversible.

$$P_5 = 101\,325 \text{ Pa}; g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

### Correction

Le bilan d'énergie appliqué au fluide entre l'entrée de la pompe et l'entrée dans la tour de refroidissement donne

$$0 = -\dot{m}_1 [(h_5 - e p_5) - (h_3 - e p_3)] + \dot{W}'_{PA}$$

soit

$$\dot{W}'_{PA} = \dot{m}_1 [(h_5 - h_3) + g h] \quad (4)$$

Or, la pompe d'alimentation est supposée fonctionner de manière adiabatique réversible donc isentropique et la circulation dans les canalisations est également supposée être isentropique. La transformation ③ → ⑤ est donc isentropique. Or, on a

$$dh = T ds + v dP$$

si bien que, avec  $ds = 0$

$$h_5 - h_3 = \int_{P_3}^{P_5} v dP = v_l (P_5 - P_3)$$

car  $v_l$  est supposé constant.

L'expression (4) donne donc

$$\boxed{\dot{W}'_{PA} = \dot{m}_1 \left[ \frac{P_5 - P_3}{\rho_l} + g h \right]} \quad (5)$$

soit

$$\boxed{\dot{W}'_{PA} = 110 \times \left[ \frac{101\,325 - 7\,400}{1\,000} + 9.81 \times 10 \right] = 21\,122.75 \text{ W} = 21.12 \text{ kW}}$$

Remarquons que l'essentiel de la puissance de la pompe est utilisée pour augmenter la pression du liquide (augmentant ainsi son énergie interne) et non pas pour le faire monter au sommet de la tour (augmentant ainsi son énergie potentielle).

On note également que la puissance de la pompe est très faible devant la puissance fournie par la turbine : du fait du faible volume massique du liquide, augmenter sa pression est peu consommateur d'énergie.

## 1.7 Analyse du cycle

On peut montrer que si la pression de la vapeur à la sortie de la turbine est égale à la pression ambiante, la puissance fournie par la turbine est d'environ 30 MW.

Discuter l'intérêt de l'installation étudiée par rapport à une installation où l'on effectue une simple détente de la vapeur à la pression ambiante (suivie d'un échange thermique pour ramener la température du fluide à la température ambiante).

## Correction

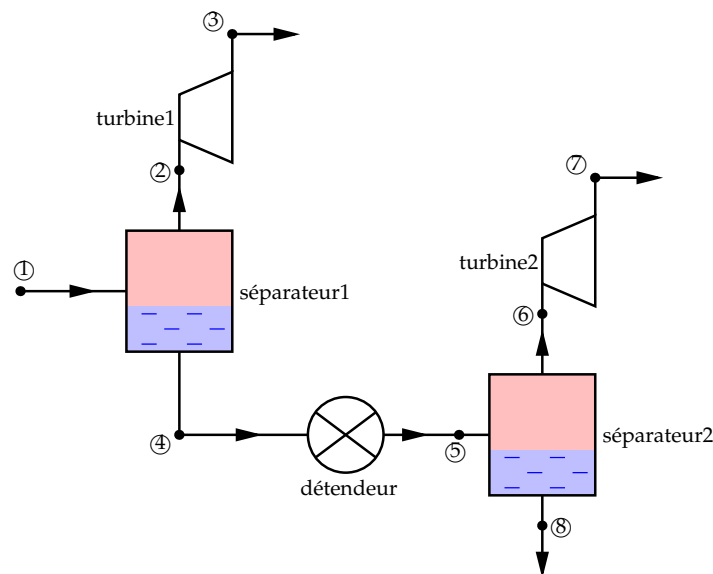
L'installation étudiée permet de fournir environ 64 MW à la turbine, soit environ 30 MW de plus que si l'on ramène la pression du fluide directement à la pression ambiante. Dans l'installation étudiée, la pression du fluide à la sortie de la turbine est inférieure à la pression ambiante et la pompe d'alimentation ramène ensuite le fluide à la pression ambiante. Mais la détente a lieu en phase gazeuse alors que la compression a lieu en phase liquide. Le travail étant proportionnel au volume massique, le travail de compression est plus faible que le travail de détente (en valeur absolue), ce qui justifie d'imposer une pression en sortie de turbine inférieure à la pression ambiante. Cette analyse qualitative se vérifie quantitativement : la puissance de compression de la pompe est de seulement environ 0.02 MW alors que l'on a un gain de puissance de détente d'environ 30 MW. L'installation étudiée permet donc de mieux valoriser l'énergie thermique du fluide que si l'on effectuait une simple détente de la vapeur à la pression ambiante. En d'autres termes, son rendement exergetique est plus élevé.

## 2 Utilisation d'eau chaude

Dans cette installation, on dispose d'eau chaude sous forme diphasique liquide-vapeur à 165°C et 0.7 MPa. Cette eau passe dans un séparateur liquide-vapeur et le débit de vapeur est de 20 kg/s.

La vapeur est alors détendue dans une turbine jusqu'à une pression de 4.24 kPa (transformation ② - ③).

Le liquide passe quant à lui dans un détendeur amenant l'eau à la sortie du détendeur à une pression de 70.14 kPa (transformation ④ - ⑤). L'eau passe alors dans un séparateur liquide-vapeur et le débit de vapeur est de 10 kg/s. Cette vapeur est alors détendue dans une turbine jusqu'à une pression de 4.24 kPa (transformation ⑥ - ⑦).



Un séparateur est un composant dans lequel le fluide entre sous forme diphasique liquide-vapeur et en ressort, d'un côté, sous forme de liquide à saturation et, de l'autre, sous forme de vapeur à saturation.

Les hypothèses suivantes peuvent être faites :

- les écoulements sont stationnaires ;
- les appareils et canalisations sont parfaitement calorifugés ;
- les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables ;
- les pertes de pression dans les canalisations et les séparateurs sont négligeables ;
- les turbines sont supposées fonctionner de manière adiabatique et réversible.

**Données** Les données thermodynamiques de l'eau à saturation sont les suivantes :

$T$ (°C)	$P^{sat}$ (kPa)	$h_l^{sat}$ (kJ/kg)	$h_v^{sat}$ (kJ/kg)	$s_l^{sat}$ (kJ/(kg.K))	$s_v^{sat}$ (kJ/(kg.K))
30	4.24	125.79	2556.30	0.4369	8.4533
90	70.14	376.92	2660.10	1.1925	7.4787
165	700	697.34	2763.50	1.9925	6.7078

Les conditions ambiantes sont  $P_a = 101\,325\text{ Pa}$  et  $T_a = 25^\circ\text{C}$  et les caractéristiques thermodynamiques de l'eau dans ces conditions sont :

$T\ (^{\circ}\text{C})$	$P\ (\text{kPa})$	$h\ (\text{kJ/kg})$	$s\ (\text{kJ}/(\text{kg.K}))$
25	101.325	104.93	0.3672

## 2.1 Diagramme de Mollier

Dans un diagramme de Mollier, tracer l'allure de l'évolution thermodynamique du fluide dans son trajet ①, ④, ⑤, ⑥, ⑦ et ①, ②, ③.

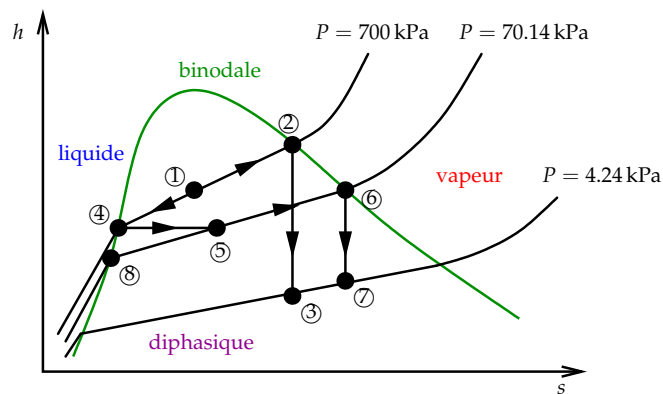
### Correction

L'état ① est diphasique à la pression  $P_1 = 700\text{ kPa}$ . Son point représentatif est donc situé à l'intérieur de la courbe binodale. Les états ② et ⑥ sont de la vapeur à saturation aux pressions respectivement  $P_1 = 700\text{ kPa}$  et  $P_2 = 70.14\text{ kPa}$ . Leurs points représentatifs sont donc situés sur la branche vapeur de la courbe binodale. L'état ④ est du liquide à saturation à la pression  $P_1 = 700\text{ kPa}$  et son point représentatif se situe donc sur la branche liquide de la courbe binodale.

L'application du bilan d'énergie au fluide compris dans le détendeur permet de montrer facilement que l'enthalpie ne varie pas entre l'entrée et la sortie du détendeur :  $h_5 = h_4$ . La pression à la sortie étant inférieure à la pression à l'entrée, l'état ⑤ est diphasique et se situe donc à l'intérieur de la courbe binodale.

Les détentes à la traversée des turbines étant isentropiques. Par conséquent, les points représentatifs des états ③ et ⑦ sont sur l'isobare  $P = 4.24\text{ kPa}$  et respectivement tels que  $s_3 = s_2$  et  $s_7 = s_6$ .

Ces points sont schématisés sur la figure ci-dessous.



## 2.2 Etat ③

Déterminer l'état ③ du fluide à la sortie de la première turbine :  $(P_3, T_3, h_3, s_3, x_3)$ .

### Correction

La pression de l'état ③ est donnée :

$$P_3 = 4.24\text{ kPa}$$

La transformation à la traversée de la turbine étant adiabatique réversible, elle est isentropique :

$$s_3 = s_2$$

Or, ② est de la vapeur à saturation à la pression de 700 kPa et les données thermodynamiques indiquent que

$$s_2 = 6.7078\text{ kJ}/(\text{kg.K})$$

On a donc :

$$s_3 = 6.7078\text{ kJ}/(\text{kg.K})$$

Les données à saturation à  $P_3 = 4.24\text{ kPa}$  montrent que  $s_l^{sat} < s_3 < s_v^{sat}$ , ce qui montre que l'état ③ est diphasique. Son titre vapeur est alors donné par

$$x_3 = \frac{s_3 - s_l^{sat}}{s_v^{sat} - s_l^{sat}}$$



soit

$$x_3 = \frac{6.7078 - 0.4369}{8.4533 - 0.4369} = 0.7823$$

On a alors

$$h_3 = h_l^{sat} + x_3 (h_v^{sat} - h_l^{sat})$$

soit

$$h_3 = 125.79 + 0.7823 \times (2556.30 - 125.79) = 2027.18 \text{ kJ/kg}$$

Le fluide étant diphasique à la pression de 4.24 kPa, sa température est égale à la température de saturation à cette pression soit

$$T_3 = T^{sat}(P_3) = 303.15 \text{ K} = 30^\circ\text{C}$$

### 2.3 Etat ⑦

Déterminer l'état ⑦ du fluide à la sortie de la seconde turbine :  $(P, T, h, s, x)$ .

#### Correction

Le raisonnement est identique à celui qui a été suivi pour la détermination des caractéristiques de l'état ③.

La pression est donnée :

$$P_7 = 4.24 \text{ kPa}$$

On a donc

$$s_7 = s_6 = 7.4787 \text{ kJ}/(\text{kg.K})$$

Le titre de vapeur est donné par :

$$x_7 = \frac{s_7 - s_l^{sat}}{s_v^{sat} - s_l^{sat}}$$

soit

$$x_7 = \frac{7.4787 - 0.4369}{8.4533 - 0.4369} = 0.8784$$

On a alors

$$h_7 = h_l^{sat} + x_7 (h_v^{sat} - h_l^{sat})$$

soit

$$h_7 = 125.79 + 0.8784 \times (2556.30 - 125.79) = 2260.75 \text{ kJ/kg}$$

La température est la température de saturation à 4.24 kPa :

$$T_7 = 303.15 \text{ K} = 30^\circ\text{C}$$

### 2.4 Puissance mécanique

Calculer la puissance mécanique  $\dot{W}'$  totale fournie à l'extérieur par l'installation.

#### Correction

La puissance mécanique totale est la somme des puissances mécaniques fournies par les deux turbines, soit :

$$\dot{W}' = \dot{W}'_{2 \rightarrow 3} + \dot{W}'_{6 \rightarrow 7}$$

En appliquant le bilan d'énergie au fluide compris dans chacune des turbines et en tenant compte des différentes hypothèses présentées, on montre facilement que

$$\dot{W}'_{2 \rightarrow 3} = \dot{m}_2 (h_3 - h_2)$$

$$\dot{W}'_{6 \rightarrow 7} = \dot{m}_6 (h_7 - h_6)$$

soit

$$\dot{W}' = \dot{m}_2 (h_3 - h_2) + \dot{m}_6 (h_7 - h_6)$$

Les débits de masse sont données et les états ② et ⑥ sont de la vapeur à saturation aux pressions respectivement de 700 kPa et 70.14 kPa dont les enthalpies sont données dans la table :

$$\dot{m}_2 = 20 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_6 = 10 \text{ kg/s}$$

$$h_2 = 2763.50 \text{ kJ/kg}$$

$$h_6 = 2660.10 \text{ kJ/kg}$$

Les enthalpies  $h_3$  et  $h_7$  ont été déterminées aux questions précédentes.

On a donc

$$\dot{W}'_{2 \rightarrow 3} = 20 \times (2027.18 - 2763.50) = -14726.40 \text{ kW}$$

$$\dot{W}'_{6 \rightarrow 7} = 10 \times (2260.75 - 2660.10) = -3993.50 \text{ kW}$$

et donc

$$\dot{W}' = -18720 \text{ kW}$$

Les signes sont bien négatifs car le fluide fournit de la puissance mécanique à la turbine.

## 2.5 Bilans au second séparateur

Ecrire les bilans de masse et d'énergie au second séparateur.

### Correction

On considère comme système l'ensemble du fluide compris dans le second séparateur ; ce système est ouvert. Le bilan de masse appliqué à ce système est

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = - \sum_{s-e} \dot{m}$$

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette relation est nul. Par ailleurs, le séparateur à une entrée (⑤) et deux sorties (⑥ et ⑧). On a alors :

$$0 = - [(\dot{m}_6 + \dot{m}_8) - \dot{m}_5]$$

soit

$$\dot{m}_5 = \dot{m}_6 + \dot{m}_8 \quad (6)$$

Cette relation exprime simplement que toute la masse qui entre dans le séparateur par unité de seconde ( $\dot{m}_5$ ) en ressort ( $\dot{m}_6 + \dot{m}_8$ ).

L'expression générale du bilan d'énergie est

$$\frac{d(\mathcal{E} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = - \sum_{s-e} \dot{m} (h + e_p + e_c) + \dot{W}' + \dot{Q}$$

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette relation est nulle. Aucune puissance extérieure n'est fournie que ce soit sous forme mécanique ou calorifique. Enfin, les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables et on a :

$$0 = - [(\dot{m}_6 h_6 + \dot{m}_8 h_8) - \dot{m}_5 h_5] + 0 + 0$$

soit

$$\dot{m}_5 h_5 = \dot{m}_6 h_6 + \dot{m}_8 h_8 \quad (7)$$

Cette relation exprime simplement le fait que toute l'enthalpie qui entre dans le séparateur par convection en ressort par convection.

## 2.6 Débit de masse en entrée du détendeur

A partir du bilan d'énergie dans le détendeur et des bilans de masse et d'énergie dans le séparateur suivant, déterminer la valeur du débit de masse  $\dot{m}_4$ .

### Correction

L'écoulement étant stationnaire et aucune puissance mécanique ou calorifique n'étant fournie au fluide dans le détendeur, le bilan d'énergie à la traversée du détendeur s'écrit :

$$\dot{m}_4 h_4 = \dot{m}_5 h_5 \quad (8)$$

avec, d'après le bilan de masse,

$$\dot{m}_5 = \dot{m}_4 \quad (9)$$

On a donc

$$h_5 = h_4$$

La valeur de  $h_4$  est connue puisque que l'état ④ est du liquide à saturation à la pression de 700 kPa :

$$h_4 = 697.34 \text{ kJ/kg}$$

Or, le débit de masse  $\dot{m}_5$  est donnée par l'expression (6), expression dans laquelle on connaît la valeur de  $\dot{m}_6$ , ce qui permet d'exprimer

$$\dot{m}_8 = \dot{m}_4 - \dot{m}_6 \quad (10)$$

En injectant cette expression dans l'expression du bilan d'énergie au séparateur (7), on obtient :

$$\dot{m}_5 h_5 = \dot{m}_6 h_6 + (\dot{m}_4 - \dot{m}_6) h_8$$

soit, en utilisant (8)

$$\dot{m}_4 h_4 = (\dot{m}_4 - \dot{m}_6) h_8 + \dot{m}_6 h_6$$

soit finalement

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_6 \frac{h_6 - h_8}{h_4 - h_8} \quad (11)$$

Toutes les valeurs des variables du membre de droite sont connues et on a donc

$$\dot{m}_4 = 10 \times \frac{2660.10 - 376.92}{697.34 - 376.92} = 71.26 \text{ kg/s}$$

## 2.7 Analyse exergetique

### 2.7.1 Puissance maximale récupérable

Quelle est la puissance mécanique maximale récupérable à partir du fluide dans l'état ④ ?

### Correction

La puissance mécanique récupérable  $\dot{W}'_{max}$  est donnée à partir de l'exergie du fluide dans l'état ④ :

$$\dot{W}'_{max} = \dot{m}_4 (ex_4 - ex_a) = \dot{m}_4 [(h_4 - h_a) - T_a (s_4 - s_a)]$$

soit

$$\dot{W}'_{max} = 71.26 \times [(697.24 - 104.93) - 298.15 \times (1.9925 - 0.3672)] = 7683.74 \text{ kW}$$

Si l'on compare cette valeur à la celle de la puissance délivrée par la première turbine (entre les états ② et ③), cette puissance n'est pas négligeable, ce qui explique que l'on a intérêt à mettre en place un système permettant de récupérer au moins une partie de cette puissance potentielle.

### 2.7.2 Rendement

Quelle pourcentage de cette puissance maximale récupérable est effectivement récupérée par l'installation ?

## Correction

A la turbine en aval du point ⑥, on récupère la puissance  $\dot{W}'_{6 \rightarrow 7} = 3993.50 \text{ kW}$ . Le pourcentage de puissance récupéré est donc

$$\eta = \frac{\dot{W}'_{6 \rightarrow 7}}{\dot{W}'_{\max}} = \frac{3993.50}{7683.74} = 52\%$$

Cela signifie que seuls 52% de la puissance maximale récupérable l'est effectivement par l'installation.

### 2.7.3 Analyse

Qu'est devenue la puissance non récupérée ?

Quantifier les différentes contributions et en particulier la puissance dissipée dans le détendeur. Cette quantification sera donnée en pourcentage de la puissance maximale récupérable et on prêtera attention à bien introduire l'exergie  $ex_a$  du fluide en équilibre avec le milieu ambiant.

Parmi les fluides sortant en ⑦ et ⑧, quelle est celui dont l'énergie est la plus valorisable sous forme de puissance mécanique ?

## Correction

D'un point de vue physique, si on analyse l'écoulement du fluide entre son entrée en ④ et ses sorties en ⑦ et ⑧, il entre avec une certaine exergie et donc dispose d'un certain potentiel à fournir de la puissance mécanique. Cette exergie est soit dissipée par les irréversibilités du système, soit effectivement transformée en puissance mécanique soit, enfin, évacuée par convection aux sorties ⑦ et ⑧. A noter qu'il n'y a pas de variation d'exergie due à des échanges de chaleur avec l'extérieur entre ④ et ⑦ et ⑧.

Pour quantifier cette analyse physique, il faut utiliser l'exergie. C'est pourquoi, on effectue un bilan d'exergie sur le système ouvert constitué du fluide compris entre les points ④, ⑦ et ⑧.

Le bilan d'exergie s'écrit

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p - T_a S) = - \sum_{s=e} \dot{m} (h + e_p + e_c - T_a s) + \dot{W}' + \dot{Q}_c \left( 1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) - \dot{D}^* \quad (12)$$

Or, l'écoulement est stationnaire, la puissance calorifique est nulle et les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables, si bien que l'expression ci-dessus devient :

$$0 = -\dot{m}_7 (h_7 - T_a s_7) - \dot{m}_8 (h_8 - T_a s_8) + \dot{m}_4 (h_4 - T_a s_4) + \dot{W}' - \dot{D}^*$$

soit

$$\dot{m}_4 (h_4 - T_a s_4) = -\dot{W}' + \dot{m}_7 (h_7 - T_a s_7) + \dot{m}_8 (h_8 - T_a s_8) + \dot{D}^* \quad (13)$$

Pour faire apparaître la puissance mécanique maximale, il est nécessaire de faire apparaître le terme  $\dot{m}_4 ex_a$  dans le membre de gauche de cette équation. Or, le bilan de masse appliqué au même système donne :

$$\dot{m}_4 = \dot{m}_7 + \dot{m}_8$$

soit

$$\dot{m}_4 ex_a = \dot{m}_7 ex_a + \dot{m}_8 ex_a \quad (14)$$

En soustrayant les équations (13) et (14), on obtient immédiatement :

$$\dot{m}_4 (h_4 - T_a s_4 - ex_a) = -\dot{W}' + \dot{m}_7 (h_7 - T_a s_7 - ex_a) + \dot{m}_8 (h_8 - T_a s_8 - ex_a) + \dot{D}^* \quad (15)$$

Dans cette expression, le membre de gauche représente la puissance mécanique maximale récupérable  $\dot{W}'_{\max}$ ,  $(-\dot{W}')$  représente la puissance mécanique effectivement récupérée, les termes proportionnels à  $\dot{m}_7$  et  $\dot{m}_8$  représentent les flux convectifs d'exergie sortants et  $\dot{D}^*$  représente l'exergie dissipée par les irréversibilités des transformations. La puissance  $\dot{D}^*$  est en fait dissipée uniquement dans le détendeur. En effet, les canalisations sont parfaites (pas de frottement et pas d'échange calorifique avec l'extérieur), la turbine est supposée fonctionner de manière réversible (et donc sans source irréversible d'entropie et donc sans dissipation d'exergie) et le séparateur ne dissipe pas non plus d'exergie. On a donc  $\dot{D}^* = \dot{D}_d^*$ .

Pour calculer la puissance  $\dot{D}_d^*$  dissipée dans le détendeur, on effectue un bilan d'exergie à la traversée du détendeur. Au détendeur, les puissances mécanique et calorifique sont nulles ; l'écoulement étant par ailleurs stationnaire, le bilan général d'exergie (12) devient :

$$\dot{D}_d^* = -\dot{m}_4 [(h_5 - h_4) - T_a (s_5 - s_4)]$$

Or, le bilan d'énergie montre que  $h_5 = h_4$ , d'où

$$\dot{D}_d^* = \dot{m}_4 T_a (s_5 - s_4) \quad (16)$$

Il convient alors de calculer  $s_5$ .

On a

$$h_5 = h_4 = 697.34 \text{ kJ/kg}$$

Or

$$x_5 = \frac{h_5 - h_l^{sat}}{h_v^{sat} - h_l^{sat}}$$

les grandeurs à saturation correspondant à celles à la température de 90°C. On a donc

$$x_5 = \frac{697.34 - 376.92}{2660.10 - 376.92} = 0.1403$$

D'où

$$s_5 = s_l^{sat} + x_5 (s_v^{sat} - s_l^{sat})$$

soit

$$s_5 = 1.1925 + 0.1403 \times (7.4787 - 1.1925) = 2.0745 \text{ kJ/(kg.K)}$$

L'application numérique de la relation (16) donne

$$\dot{D}_d^* = 71.26 \times 298.15 \times (2.0745 - 1.9925) = 1742.19 \text{ kW}$$

Les débits exergetiques sont

$$\dot{m}_7 (h_7 - T_a s_7) = 10 \times (2260.75 - 298.15 \times 7.4787) = 355.26 \text{ kW}$$

$$\dot{m}_8 (h_8 - T_a s_8) = (71.26 - 10) \times (376.92 - 298.15 \times 1.1925) = 1588.28 \text{ kW}$$

On a donc

$$\frac{\dot{D}_d^*}{\dot{W}'_{max}} = \frac{1742.19}{7683.74} = 23\%$$

$$\frac{\dot{m}_7 (h_7 - T_a s_7 - ex_a)}{\dot{W}'_{max}} = \frac{355.26}{7683.74} = 5\%$$

$$\frac{\dot{m}_8 (h_8 - T_a s_8 - ex_a)}{\dot{W}'_{max}} = \frac{1588.28}{7683.74} = 21\%$$

Cela montre que 23% de la puissance maximale est dissipée dans le détendeur, 21% est perdue par le liquide à la sortie du séparateur et seulement 5% est perdue dans la vapeur à la sortie de la turbine.

Cette analyse montre également que c'est le fluide sortant en ⑧ qui est le plus valorisable sous forme de puissance mécanique puisque, au mieux, on peut espérer en récupérer environ 1.6 MW alors que l'on ne pourrait récupérer au mieux que 0.4 MW du fluide sortant en ⑦.

### Remarque

Si l'on ne change pas l'installation, cela signifie que pour récupérer encore de la puissance mécanique, l'effort devrait porter sur la récupération de puissance à partir du liquide sortant du séparateur. On peut concevoir plusieurs manières de récupérer de la puissance mécanique à partir du fluide sortant en ⑧. Une première possibilité consiste à mettre en oeuvre la solution mise en place dans le premier problème :

1. détendre le liquide suffisamment à travers un détendeur pour qu'il devienne diphasique ;
2. faire passer le mélange diphasique dans un séparateur ;
3. détendre la vapeur dans une turbine où l'on récupère de la puissance mécanique puis la condenser et enfin la comprimer dans une pompe pour ramener la pression du liquide à la pression ambiante ;
4. ramener la pression du liquide à la pression ambiante grâce à une pompe.

Une autre solution consiste à faire passer le fluide dans un échangeur pour récupérer de la puissance calorifique et la transformer en puissance mécanique via un cycle secondaire, par exemple un cycle à gaz de Brayton.